ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 15 April 1935 Heft 3

Inhalt:

Das erste Heft dieses Jahrgangs ist als Doppelheft erschienen. Infolgedessen werden sich die Erscheinungsfristen etwas verschieben. Der Gesamtumfang des Bandes XV bleibt unverändert.

Die Schriftleitung. Trefftz.

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Berechnung der kritischen Drehzahlen bei homogenen und fast homogenen Maschinen.

Von *P. Funk* in Prag.

§ 1. Allgemeine Sätze.

Die folgende Darlegung soll nicht nur einen bestimmten Rechnungsgang erklären, sondern soll auch einen Einblick gewähren, wie einzelne Abänderungen bei einer Maschine Änderungen an den Werten der kritischen Drehzahlen hervorbringen.

Daß bei den vielen theoretischen Annahmen, die gemacht werden müssen, um die im folgenden benützte Theorie zu begründen, keine genaue Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie zu erwarten ist, ist von vornherein klar. Diesbezüglich sei hier nur auf einige neuere Arbeiten von Trefftz[1]) und seinen Schülern einerseits, andererseits auf eine Arbeit von Grammel[2]) verwiesen. Höhere Genauigkeit entspricht daher hier mehr einem mathematischen Bedürfnis.

Den Ausgangspunkt zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen liefert das System der Differentialgleichungen

$$\Theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} = c_{1,2} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Theta_\nu \frac{d^2 \varphi_\nu}{d t^2} = c_{\nu,\nu-1} (\varphi_{\nu-1} - \varphi_\nu) + c_{\nu,\nu+1} (\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Theta_n \frac{d^2 \varphi_n}{d t^2} = c_{n,n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n),$$

[1]) E. Trefftz: Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen, Aachener Vorträge auf dem Gebiet der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Berlin 1930. — F. Kluge: Zur Ermittlung kritischer Drehzahlen von Kurbelwellen, Ing.-Archiv 1931, II. Bd., S. 119. — T. E. Schunck: Berechnung der kritischen Umlaufzahlen für die Welle eines Flugzeugmotors, Ing.-Archiv 1931, II. Bd., S. 591.

[2]) R. Grammel: Über die Torsion von Kurbelwellen, Ing.-Archiv 1933, IV. Bd., S. 287.

wobei Θ_ν das Trägheitsmoment, φ_ν den Verdrehungswinkel bedeutet und

$$c_{\nu,\nu+1} = \frac{G\, d^4 \pi}{16\, l_{\nu,\nu+1}}.$$

Dabei bedeutet G den Schubmodul, d den Durchmesser der Welle und $l_{\nu,\nu+1}$ die Entfernung der schwingenden Massen.

Setzt man $\varphi_\nu = A_\nu \cdot \sin \omega t$, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} -A_1 (c_{1,2} - \omega^2 \Theta_1) + c_{1,2} A_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{\nu,\nu-1} A_{\nu-1} - (c_{\nu,\nu-1} + c_{\nu,\nu+1} - \omega^2 \Theta_\nu) A_\nu + c_{\nu,\nu+1} A_{\nu+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{n-1,n} A_{n-1} - (c_{n-1,n} - \omega^2 \Theta_n) A_n = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (1).$$

Die Gleichung für die gesuchten kritischen Drehzahlen ergibt sich sofort aus der Forderung, daß dieses Gleichungssystem für die A_ν eine Lösung haben soll, bei der nicht alle A_ν identisch Null sind, durch Nullsetzen der folgenden Determinante

$$\begin{vmatrix} -(c_{1,2} - \omega^2 \Theta_1) & c_{1,2} & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \\ c_{1,2} & -(c_{1,2} + c_{2,3} - \omega^2 \Theta_2) & c_{2,3} & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,3} & -(c_{2,3} + c_{3,4} - \omega^2 \Theta_3) & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \;\dots\dots & c_{n-2,n-1} & & -(c_{n-2,n-1} + c_{n-1,n} - \omega^2 \Theta_{n-1}) & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 \;\dots\dots & 0 & & c_{n-1,n} & -(c_{n-1,n} - \omega^2 \Theta_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2).$$

Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ erhalten wir:

$$\omega^2 - c_{1,2}\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3a),$$

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{c_{1,2}}{\Theta_1} + \frac{c_{1,2} + c_{2,3}}{\Theta_2} + \frac{c_{2,3}}{\Theta_3}\right] + c_{1,2}\, c_{2,3} \left[\frac{1}{\Theta_1 \Theta_2} + \frac{1}{\Theta_2 \Theta_3} + \frac{1}{\Theta_1 \Theta_3}\right] = 0 \quad \dots \quad (3b).$$

Wir werden diese Gleichung als die Frequenzgleichung bezeichnen. Wie man unmittelbar erkennt, ist dies eine Gleichung n-ten Grades. Eine triviale Wurzel ist Null. (Die ihr entsprechenden A_ν sind alle einander gleich.) Wir erhalten also $n - 1$ kritische Drehzahlen.

Multipliziert man im Gleichungssystem (1) die ν-te Zeile mit A_ν und addiert sämtliche Gleichungen, so ergibt sich

$$\omega^2 = \frac{\dfrac{1}{2} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n-1} c_{\nu,\nu+1} (A_{\nu+1} - A_\nu)^2}{\dfrac{1}{2} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \Theta_\nu A_\nu^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4).$$

Andererseits erkennt man sofort, daß aus der Aufstellung der Forderung, es solle dieser Wert von ω^2 ein Extremwert sein, durch Differentiation nach A_ν das Gleichungssystem (1) folgt. Die letztere Forderung kann man auch so aussprechen, daß bei gegebenem Wert des Nenners der Zähler ein Extremwert sein soll.

Gl. (4) hätte man bekanntlich auch durch folgende physikalische Überlegung gewinnen können. Der Zähler des Bruches stellt die potentielle Energie in einem Augenblick des größten Ausschlages dar, der mit ω^2 multiplizierte Nenner stellt die maximale kinetische Energie, d. h. die kinetische Energie im Augenblick des Durchschwingens durch die Nullage, dar. Die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke ist also eine unmittelbare Folge aus dem Energieprinzip. Aus der Tatsache, daß ω^2 einen Extremwert darstellt, bzw. aus den Gl. (1) folgt sofort eine Reihe von wichtigen Sätzen[3]).

I. Für alle kritischen Drehzahlen ergibt sich leicht eine obere Schranke. Bezeichnet man den größten Wert von $\sqrt{\dfrac{c_{\nu,\nu+1}}{\Theta_\nu}}$ mit Ω_0, so gilt stets $\omega < 2\,\Omega_0$.

[3]) Diese Sätze finden sich zum Teil auch bei R. Grammel mit anderen Beweisen: Ein neues Verfahren zur Berechnung der Drehschwingungszahlen von Kurbelwellen, Ing.-Archiv 1931, II. Bd., S. 228. Bei den Beweisen beruft sich Grammel gelegentlich auf die Mitwirkung von O. Perron.

Beweis: Aus (4) folgt unmittelbar

$$\omega^2 < \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\left[c_{\nu,\nu+1}(A_\nu - A_{\nu+1})^2 + c_{\nu,\nu+1}(A_\nu + A_{\nu+1})^2\right] + 2\,c_{1,2}\,A_1^2 + 2\,c_{n-1,n}\,A_n^2}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Theta_\nu\,A_\nu^2},$$

also

$$\omega^2 < \frac{4\,c_{1,2}\,A_1^2 + 4\,c_{n-1,n}\,A_n^2 + 2\sum_{\nu=2}^{\nu=n-1}(c_{\nu,\nu-1} + c_{\nu,\nu+1})\,A_\nu^2}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Theta_\nu\,A_\nu^2}.$$

Setzt man nun $\sqrt{\Theta_\nu}\,A_\nu = D_\nu$, so ergibt sich

$$\omega^2 < \frac{4\,\Omega_0^2\sum_{\nu=1}^{\nu=n}D_\nu^2}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n}D_\nu^2} = 4\,\Omega_0^2.$$

Da die höchste kritische Drehzahl den größten Wert von (4) darstellt, so kann man durch beliebige Wahl der A_ν leicht eine untere Schranke für die höchste kritische Drehzahl angeben.

II. Die Wurzeln der Frequenzgleichung sind stets einfach. Wäre nämlich eine Doppelwurzel vorhanden, so müßte der Rang der Determinante kleiner als $n-1$ sein. Dies würde aber im Widerspruch mit der Tatsache stehen, daß durch den Wert von A_1 alle übrigen A_ν eindeutig bestimmt sind, wenn — wie vorausgesetzt — alle $c_{\nu,\nu+1} \neq 0$ sind.

III. Denkt man sich eine der Größen $c_{\nu,\nu+1}$, die wir von nun an als das Steifigkeitsmaß des betreffenden Wellenstückes bezeichnen wollen, veränderlich, so wird

$$\frac{d(\omega^2)}{d\,c_{\nu,\nu+1}} = \frac{\partial(\omega^2)}{\partial\,c_{\nu,\nu+1}} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial A_\nu}\,\frac{\partial A_\nu}{\partial\,c_{\nu,\nu+1}}.$$

Aus der Tatsache, daß ω^2 einen Extremwert darstellt, folgt, daß jedes Glied des Summenausdruckes verschwindet, und somit wird

$$\frac{d(\omega^2)}{d\,c_{\nu,\nu+1}} = \frac{\partial(\omega^2)}{\partial\,c_{\nu,\nu+1}}.$$

Somit haben wir

$$\frac{d(\omega^2)}{d\,c_{\nu,\nu+1}} = \frac{(A_\nu - A_{\nu+1})^2}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Theta_\nu\,A_\nu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Mit Rücksicht auf (4) ergibt sich somit für kleine Werte von $\Delta c_{\nu,\nu+1}$ annähernd

$$\frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} \simeq \frac{\Delta c_{\nu,\nu+1}}{c_{\nu,\nu+1}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\,c_{\nu,\nu+1}(A_\nu - A_{\nu+1})^2}{\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}c_{\nu,\nu+1}(A_\nu - A_{\nu+1})^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

In Worten also: Wird in einem Stück der Welle das Steifigkeitsmaß geändert, so ändert sich die kritische Drehzahl im selben Sinn, und zwar ist annäherend für kleine Änderungen des Steifigkeitsmaßes der prozentuelle Zuwachs der kritischen Drehzahl gleich dem prozentuellen Zuwachs des Steifigkeitsmaßes multipliziert mit einem Bruch, dessen Zähler gleich ist der maximalen potentiellen Energie im abgeänderten Stück der Welle und dessen Nenner der maximalen potentiellen Energie der gesamten Welle gleich ist.

IV. Für Abänderung eines einzelnen Trägheitsmomentes ergibt sich auf analoge Weise:

$$\frac{d(\omega^2)}{d\,\Theta_\nu} = \frac{-\omega^2 A_\nu^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \Theta_\nu A_\nu^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta\,\omega^2}{\omega^2} \simeq \frac{-\Delta\,\Theta_\nu}{\Theta_\nu} \cdot \frac{\frac{1}{2}\,\Theta_\nu A_\nu^2}{\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \Theta_\nu A_\nu^2} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

In Worten: Wird bei einer einzelnen schwingenden Masse das Trägheitsmoment abgeändert, so ändert sich die kritische Drehzahl im entgegengesetzten Sinn, und zwar ist annähernd für kleine Änderungen der Masse der prozentuelle Zuwachs der kritischen Drehzahl gleich der prozentuellen Abnahme der abgeänderten schwingenden Masse multipliziert mit einem Bruch, dessen Zähler gleich ist der maximalen kinetischen Energie der betreffenden schwingenden Masse, und dessen Nenner gleich ist der maximalen kinetischen Energie aller schwingenden Massen[4]).

§ 2. Homogene Maschinen mit einer oder zwei Zusatzmassen.

Für den Fall der Gleichheit mehrerer Trägheitsmomente und mehrerer Steifigkeitsmaße spricht man von einer homogenen Maschine. Hier kann man mit Vorteil die Theorie der linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten heranziehen. Setzen wir in diesem Fall zur Abkürzung $c_{\nu,\nu+1} = c$ und $\Theta_\nu = \Theta$ und führen wir einen Winkel α ein durch

$$2 - \frac{\Theta}{c}\,\omega^2 = 2\cos\alpha \quad \text{bzw.} \quad \omega^2 = 4\,\frac{c}{\Theta}\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

so erhalten wir für die Amplituden ein Gleichungssystem von der allgemeinen Form

$$A_{\nu-1} - 2\cos\alpha\, A_\nu + A_{\nu+1} = 0; \quad \nu = 2, 3 \ldots \ldots\ldots \quad (9).$$

Führen wir nun, um der ersten Gleichung eine übersichtliche Form zu geben, eine Größe (A_0) ein durch die Gleichung

$$(A_0) - 2\cos\alpha\, A_1 + A_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

so erhalten wir an Stelle der ersten Gleichung

$$(A_0) - A_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Die allgemeine Lösung unserer Differenzengleichung hat die Form

$$A_\nu = c_1 \cos\nu\,\alpha + c_2 \sin\nu\,\alpha.$$

Die Bestimmung von c_1 und c_2 erfolgt durch (11). Da es auf einen Proportionalitätsfaktor für A_ν nicht ankommt, erhalten wir

$$A_\nu = \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\alpha \text{ [5]}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Um die Frequenzgleichung bei einer Maschine mit n Zylindern und einer bzw. zwei Zusatzmassen aufzustellen, könnte man unmittelbar folgendermaßen vorgehen. Man hätte in den entsprechend (1) gebildeten Gleichungen für $\nu = n$ den Ausdruck (12) zu benützen und müßte aus der n-ten und $(n+1)$-ten bzw. aus der n-ten, $(n+1)$-ten und $(n+2)$-ten Gleichung A_{n+1} bzw. A_{n+1} und A_{n+2} eliminieren. Um aber dieses Eliminationsresultat in einer mechanisch interpretierbaren Form zu gewinnen, die auch zu einer bequemen graphischen Ermittlung der kritischen Drehzahlen geeignet ist, schließen wir uns hier einem von Behrens[6]) durchgeführten Gedanken an. Das Ziel seiner Überlegung besteht darin, die Ermittlung der kritischen Drehzahl solcher Fälle an die Ermittlung der kritischen Drehzahl im Fall von zwei bzw. drei Massen möglichst anzugleichen. Wir führen zunächst die Größe (A_{n+1}) ein durch die Gleichung

$$A_{n-1} - 2\cos\alpha\, A_n + (A_{n+1}) = 0.$$

Subtraktion von der entsprechenden durch c dividierten Gleichung in (1) liefert

$$c_{n,n+1}(A_n - A_{n+1}) = c\,(A_n - (A_{n+1})).$$

[4]) Die in III. und IV. ausgesprochenen Sätze stellen ein Analogon zu den Formeln der Lord Rayleighschen Störungstheorie bei Differentialgleichung dar. Vgl. Lord Rayleigh: Theory of sound, 2. Aufl., London 1929, I. Bd., insbesondere § 91 bzw. Courant-Hilbert: Methoden der mathem. Physik, 2. Aufl., S. 296.

[5]) Grammel (siehe Fußnote 3) erledigt die entsprechende Aufgabe dadurch, daß er Tabellen aufstellt für die sogenannten Frequenzpolynome. Diese entsprechen $\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$ als Funktion von $4\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

[6]) H. Behrens: Die Berechnung erzwungener Drehschwingungen von Mehrmassensystemen mit besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse bei Motoranlagen, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1930, S. 297.

Wir vergleichen nun entsprechend der beistehenden Abb. 1 eine Maschine mit n Zylindern und einer bzw. zwei Zusatzmassen mit einer Maschine, bei der an Stelle der n Zylinder die Masse des n-ten Zylinders durch eine Masse mit dem Trägheitsmoment $\frac{\Theta}{\varphi}$ ersetzt ist, wobei φ eine Größe ist, die wir als Massenabänderungsquotient bezeichnen wollen. Der soeben angeschriebenen Gleichung entspricht bei der Vergleichsmaschine analog der ersten Gleichung von (1) die Gleichung

$$A_n \frac{\Theta}{\varphi} \omega^2 = c_{n,\,n+1} (A_n - A_{n+1}).$$

Sollen die beiden letzten Gleichungen dasselbe aussagen, so erhalten wir für den Massenabänderungsquotienten φ unter Benutzung von (8) die Formel

$$\frac{1}{\varphi} A_n \, 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (A_n - (A_{n+1})) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

und somit nach (12)

$$\varphi = \sin \alpha \operatorname{cotg} n\,\alpha + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Und die Frequenzgleichung im Falle von einer bzw. zwei Zusatzmassen gewinnen wir somit, indem wir in (3a) bzw. (3b) die Trägheitsmomente bzw. Steifigkeitsmaße durch die in der Abb. 1 angegebenen Größen ersetzen. Wir erhalten somit die Frequenzgleichung im Falle einer Zusatzmasse in der Form

$$\omega^2 - c_{n,\,n+1} \left(\frac{\varphi}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_{n+1}} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{c}{c_{n,\,n+1}} - \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} \quad . \; . \; . \; . \; (15)$$

und im Fall zweier Zusatzmassen

$$\varphi = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{c}{c_{n,\,n+1}} - \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - \frac{c_{n+1,\,n+2} \frac{\Theta}{\Theta^2_{n+1}}}{4 \frac{c}{\Theta} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - c_{n+1,\,n+2} \left(\frac{1}{\Theta_{n+1}} + \frac{1}{\Theta_{n+2}} \right)} \quad . \; (16).$$

Zu einer graphischen Ermittlung gelangen wir, indem wir $4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ als Abszisse und φ als Ordinate auftragen. Wir erhalten somit im Fall der Gl. (15) eine Gerade und im Fall der Gl. (16) eine Hyperbel, deren Asymptoten sich leicht unmittelbar einzeichnen lassen. Die Abszisse der vertikalen Asymptote entspricht einer kritischen Drehzahl, wie sie vorhanden wäre, wenn nur die beiden letzten Massen vorhanden wären. Um die kritische Drehzahl zu ermitteln, haben wir die Gerade bzw. die Hyperbel mit der Kurve, die den Massenabänderungsquotient darstellt, zum Schnitt zu bringen. Da es nur auf die Bestimmung der ersten oder zweiten kritischen Drehzahl ankommt, benötigt man die Kenntnis der Massenabänderungsquotienten nur im Intervall von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 25^0$. Abb. 1 (rechts) und 2 entsprechen dem Beispiel,

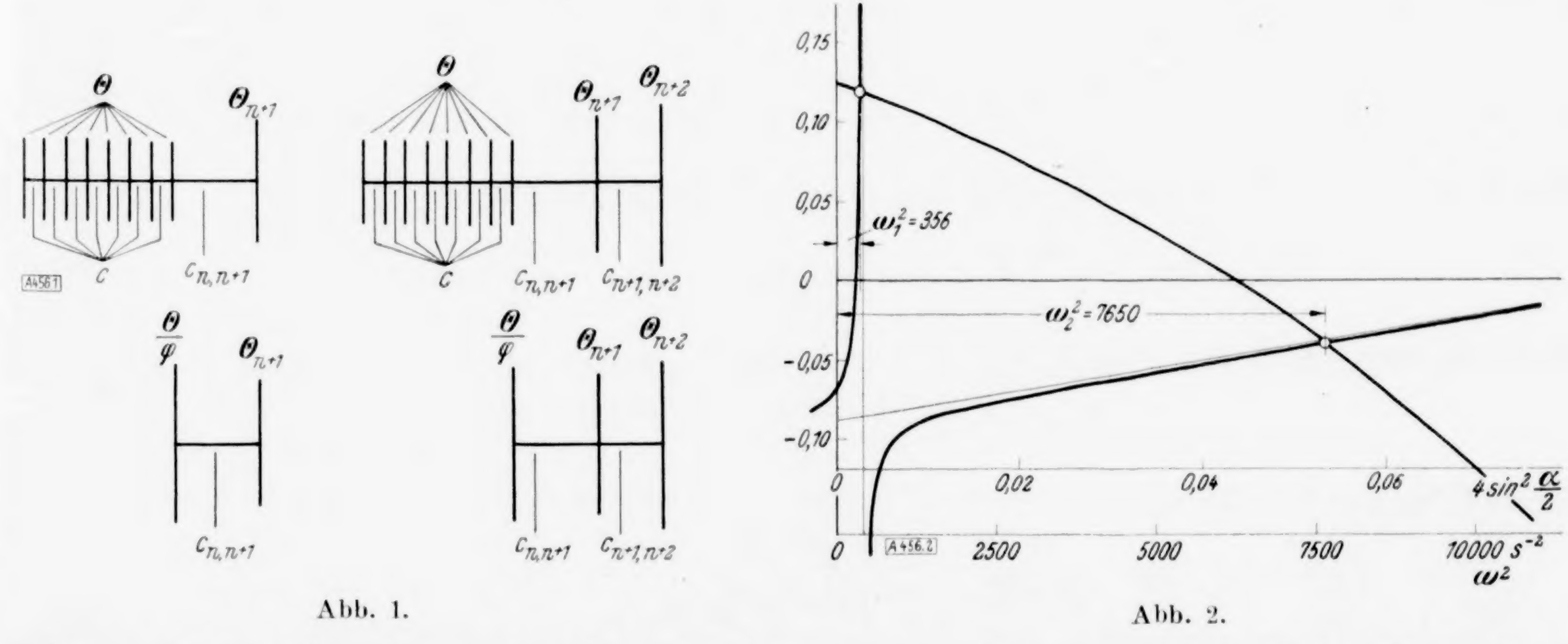


Abb. 1. Abb. 2.

auf das wir im folgenden noch näher eingehen werden. Die rechnerische Behandlung dieses Beispieles kann einfach durch Vergleich der Werte von φ in (14) und (16) erfolgen. Anwendung von Interpolationsformeln, wie sie Behrens vorschlägt, wird im allgemeinen wohl kaum nötig sein, da die in (14) aufgestellte Formel eine genügend einfache Bauart besitzt.

§ 3. Berücksichtigung von Abweichungen von der Homogenität.

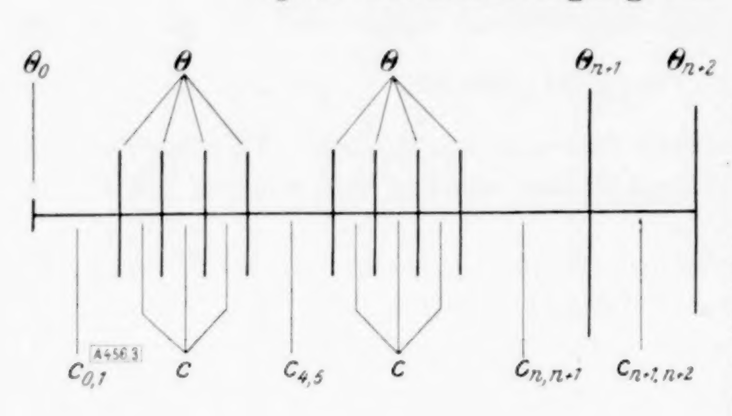


Abb. 3.

Bei kleinen Abweichungen können wir unmittelbar die in Satz III und IV angegebenen Formeln (6) und (7) benützen. Bei größeren Abweichungen ist dies jedoch nicht mehr zulässig, doch kann man hier durch eine kleine Abänderung dieser Formeln zum Ziel gelangen. Um Weitläufigkeit zu vermeiden, wollen wir unsere Erörterungen gleich an ein spezielles Beispiel anknüpfen. Die nachstehenden numerischen Angaben entsprechen einem Beispiel, das ich einem in Vorbereitung befindlichen Buch von Opitz, Schanghai, entnommen habe.

Θ_ν	in cmkgsec²	c	in cmkg
$\Theta_0 =$	1440	$c_{0,1}$	1826×10^6
$\Theta_1 = \Theta =$	19550	$c_{1,2} = c =$	2810×10^6
$\Theta_2 = \Theta =$	19550	$c_{2,3} = c =$	2810×10^6
$\Theta_3 = \Theta =$	19550	$c_{3,4} = c =$	2810×10^6
$\Theta_4 = \Theta =$	19550	$c_{4,5} =$	1610×10^6
$\Theta_5 = \Theta =$	19550	$c_{5,6} = c =$	2810×10^6
$\Theta_6 = \Theta =$	19550	$c_{6,7} = c =$	2810×10^6
$\Theta_7 = \Theta =$	19550	$c_{7,8} = c =$	2810×10^6
$\Theta_8 = \Theta =$	19550	$c_{8,9} =$	2970×10^6
$\Theta_9 =$	219600	$c_{9,10} =$	$20{,}68 \times 10^6$
$\Theta_{10} =$	68400		

Zu einer homogenen Maschine mit zwei Zusatzmassen gelangen wir, indem wir die vorstehenden Angaben dadurch abändern, daß wir zunächst Θ_0 vernachlässigen (Einblasekompressor) und $c_{4,5}$ durch c ersetzen. Nach dem im vorhergehenden § 2 angegebenen Verfahren ergibt sich dann für die erste und für die zweite kritische Drehzahl

$$\omega_1^2 = 356\,\text{Sek}^{-2}, \qquad \omega_2^2 = 7672\,\text{Sek}^{-2}.$$

a) **Berücksichtigung von** $c_{4,5} \neq c$. Wir wollen nun zunächst nur berücksichtigen, daß $c_{4,5} \neq c$ ist. Wir setzen $\frac{c_{4,5}}{c} = \gamma$, wobei $\gamma = 0{,}574$. Wir ziehen den Satz III. heran und zeigen, daß diese Korrektur bei der ersten kritischen Drehzahl belanglos ist und bei der zweiten die Korrektur eine Herabsetzung des Wertes der kritischen Drehzahl um 9,2 % bedeutet. Da γ nicht nahe bei 1 ist, kann man aus Gl. (6) nur ungefähr die Größenordnung der anzubringenden Korrektur schätzen. Zu einer genaueren Schätzung führt die folgende Betrachtung. Das Gleichungssystem von (1) erfährt dadurch eine Abänderung, daß die vierte und fünfte Gleichung jetzt lautet:

$$A_3 - \left(1 + \gamma - \frac{\omega^2 \Theta}{c}\right) A_4 + \gamma A_5 = 0, \qquad \gamma A_4 - \left(\gamma + 1 - \frac{\omega^2 \Theta}{c}\right) A_5 + A_6 = 0.$$

Wir führen nun die Größe (A_4) und (A_5) durch die Beziehungen ein

$$A_3 - \left(2 - \frac{\omega^2 \Theta}{c}\right) A_4 + (A_5) = 0, \; (A_4) - \left(2 - \frac{\omega^2 \Theta}{c}\right) A_5 + A_6 = 0.$$

Dadurch ergibt sich aus diesen beiden Gleichungen

$$A_4 - A_5 = \frac{A_4 + (A_5)}{\gamma} = \frac{(A_4) - A_5}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Somit folgt aus Gl. (5)

$$\frac{d(\omega^2)}{d c_{4,5}} = \frac{1}{c_{4,5}{}^2} \cdot \frac{c^2 [A_4 - (A_5)]^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=10} \Theta_\nu A_\nu{}^2}.$$

Denken wir uns nun den Wert von $c_{4,5}$ veränderlich in den Grenzen von c bis γc, so ändern sich zwar in dem Ausdruck auf der rechten Seite der angeschriebenen Gleichung beide Faktoren, vernachlässigen wir aber die Veränderlichkeit des zweiten Faktors, was dann er-

laubt ist, wenn man erwarten darf, daß ω^2 sich nur um wenige Prozent ändern wird, so können wir die Differentialgleichung sofort integrieren und erhalten

$$\Delta(\omega^2) \simeq \frac{c^2 [A_4 - (A_5)]^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=10} \Theta_\nu A_\nu^2} \int\limits_{c_{4,5}=c}^{c_{4,5}=\gamma c} \frac{d c_{4,5}}{c_{4,5}^2} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{c [A_4 - (A_5)]^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=10} \Theta_\nu A_\nu^2},$$

oder indem wir wieder durch ω^2 dividieren und $-\Delta c$ einführen statt $(1-\gamma) c$

$$\frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} = +\frac{1}{\gamma} \frac{\Delta c}{c} \frac{c [A_4 - (A_5)]^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=9} c_{\nu,\nu+1} (A_\nu - A_{\nu+1})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18).$$

In Worten also: Wir bekommen näherungsweise die prozentuelle Änderung von ω^2 bei größeren Werten von Δc, indem wir den früher in Gl. (6) angegebenen Ausdruck noch durch die Größe γ dividieren.

Um die Schätzung vorzunehmen, müssen wir die Werte der Amplituden für den Wert $c_{4,5} = c$ kennen. Es ergibt sich für die erste und zweite kritische Drehzahl die folgende Tabelle:

	Erste kritische Drehzahl	Zweite kritische Drehzahl
$A_1 =$	+0,999	+0,992
$A_2 =$	+0,997	+0,944
$A_3 =$	+0,992	+0,840
$A_4 =$	+0,985	+0,691
$A_5 =$	+0,975	+0,510
$A_6 =$	+0,967	+0,299
$A_7 =$	+0,951	+0,074
$A_8 =$	+0,932	−0,157
$A_9 =$	+0,912	−0,368
$A_{10} =$	−5,197	+0,015

Wenn wir bei der Schätzung für die erste kritische Drehzahl im Nenner lediglich die im letzten Wellenstück angesammelte potentielle Energie berücksichtigen, so ergibt sich

$$\frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} \simeq +\frac{1}{\gamma} \frac{\Delta c}{c} \frac{c \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin 4\alpha\right)^2}{c_{9,10} (A_9 - A_{10})^2},$$

oder wegen (1) [letzte Gleichung] und (8)

$$\frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} \simeq +\frac{1}{\gamma} \frac{\Delta c}{c} \frac{\omega^2 \Theta \sin^2 4\alpha}{c_{9,10} \left(A_{10} \frac{\Theta_{10}}{c_{9,10}} \omega^2\right)^2} \simeq -0{,}0001.$$

Bei der Schätzung der zweiten kritischen Drehzahl ist die soeben gemachte Vernachlässigung bei der Berechnung der gesamten potentiellen Energie nicht zulässig. Nach Gl. (18) ergibt sich

$$\frac{\Delta \omega^2}{\omega^2} = -0{,}092.$$

Somit

$$\omega_2^2 \simeq 6966 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Um die Genauigkeit zu überprüfen, wollen wir noch ω_2^2 direkt aus der Frequenzgleichung ermitteln. Wir setzen für die abgeänderten Ausschläge:

$$\bar{A}_\nu = \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\alpha + B_\nu; \quad \text{außerdem } (\bar{A}_4) = \cos\left(4 - \frac{1}{2}\right)\alpha + (B_4), \quad (\bar{A}_5) = \cos\left(5 - \frac{1}{2}\right)\alpha + (B_5),$$

$$(\bar{A}_9) = \cos\left(9 - \frac{1}{2}\right)\alpha + (B_9).$$

Setzt man jetzt wieder $\bar{A}_1 = \cos\frac{\alpha}{2}$, so folgt:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = (B_5) = 0.$$

Aus (17) ergibt sich dann:

$$\cos\left(4-\frac{1}{2}\right)a - B_5 - \cos\left(5-\frac{1}{2}\right)a = \frac{1}{\gamma}\left\{\cos\left(4-\frac{1}{2}\right)a - \cos\left(5-\frac{1}{2}\right)a\right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left\{\cos\left(4-\frac{1}{2}\right)a + (B_4) - \cos\left(5-\frac{1}{2}\right)a - B_5\right\}.$$

Hieraus folgt

$$(B_4) - B_5 = 0\,, \qquad B_5 = 2\sin 4\,a \sin\frac{a}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Da unsere Differenzengleichung (9) erfüllt ist für (B_4), B_5, B_6, B_7, B_8, (B_9), erhalten wir für diese Werte, indem wir die letzten beiden Gleichungen als Anfangsbedingungen betrachten,

$$B_\nu = 2\sin 4\,a\sin\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\cos\left(\nu-5+\frac{1}{2}\right)a}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Und somit ergibt sich für (A_4), A_5, A_6, A_7, A_8, (A_9),

$$\bar{A}_\nu = \cos\left(\nu-\frac{1}{2}\right)a + 2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin 4\,a\cos\left(\nu-5+\frac{1}{2}\right)a\,.$$

Setzen wir nun diesen Wert für A_ν in die Formel (13) für den Massenabänderungsquotienten ein, so ergibt sich an Stelle von (14)

$$\bar{\varphi} = 2\sin\frac{a}{2}\,\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)a + 2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin 4\,a\cos\left(n-5+\frac{1}{2}\right)a}{\sin n\,a + 2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin 4\,a\sin(n-4)\,a},$$

wobei für uns $n=8$ zu setzen ist, und somit

$$\omega_2{}^2 = 6989\ \mathrm{Sek}^{-2}$$

in guter Übereinstimmung mit (19).

b) Berücksichtigung von $\Theta_0 \neq 0$. Mit Rücksicht auf die Kleinheit von $\frac{\Theta_0}{\Theta}$ wollen wir uns hier auf die direkte Heranziehung von der im Satz IV angegebenen Formel beschränken, das heißt, wir benützen

$$\omega^2(\Theta_0) \simeq \omega^2(0) + \Theta_0\left(\frac{d(\omega^2)}{d\,\Theta_0}\right)_{\Theta_0=0}.$$

Wollen wir nun zur Ermittlung von $\left(\frac{d(\omega^2)}{d\,\Theta_0}\right)_{\Theta_0=0}$ Gl. (7) heranziehen, so haben wir zu berücksichtigen, daß für $\Theta_0=0$ $A_0=A_1$ ist, und damit erhalten wir

$$\left(\frac{d(\omega^2)}{d\,\Theta_0}\right)_{\Theta_0=0} = \frac{-A_1{}^2\,\omega^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n+2}\Theta_\nu A_\nu{}^2}.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} \simeq -\Theta_0\,\frac{A_1{}^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n+2}\Theta_\nu A_\nu{}^2}.$$

Bemerkenswert ist, daß der so erhaltene Wert von $c_{0,1}$ unabhängig ist. Es ergibt sich

$$\frac{\Delta(\omega_1{}^2)}{\omega_1{}^2} = -0{,}00204\,; \qquad \frac{\Delta(\omega_2{}^2)}{\omega_2{}^2} = -0{,}00947\ [7]).$$

[7]) Die Durchführung der numerischen und graphischen Rechnung habe ich meinem Assistenten Herrn Nechleba zu verdanken.

Flexure of an Infinite Plate, Having in it a Semi-Infinite Straight Crack.

By *Mildred M. Barnard,* M.A., B.Sc. (Melbourne).

Zusammenfassung. Biegung einer unendlichen Platte mit einem geradlinigen, in das Unendliche reichenden Schlitz.

Eine unendliche Platte habe einen längs der negativen x-Achse in das Unendliche reichenden geradlinigen Schlitz. Sind an den beiden Rändern des Schlitzes die angreifenden Randkräfte und Randmomente gegeben, so kann man dieselben als Funktion von $\varrho = \ln r$ (r = Radius) durch Fourierintegrale darstellen. Man erhält dann die Durchbiegung der Platte als Fourierintegral über bekannte Partikularlösungen, welche Produkte von $\cos n\varrho$ und $\sin n\varrho$ mit hyperbolischen Funktionen der Winkelkoordinate sind. — In der vorliegenden Arbeit wird der Spezialfall, auf den sich allgemeinere Fälle zurückführen lassen, behandelt, daß an zwei gegenüberliegenden Punkten der beiden Schlitzränder a) entgegengesetzt gleiche Kräfte, b) entgegengesetzt gleiche Randmomente angreifen. Für diesen Fall können die Fourierintegrale in geschlossener Form integriert werden; die Lösung erscheint als endliche Summe elementarer Funktionen. Die Lösung wird diskutiert, d. h. die Schnittkräfte und Schnittmomente werden angegeben und das Verhalten im Unendlichen und in dem singulären Nullpunkt (Schlitzende) besprochen.

§ 1. Introduction. The present paper deals with the flexure of an indefinitely extended plane elastic plate, which has in it a semi-infinite straight crack or slit. The investigation was undertaken with a view to throwing some light on the distribution of stress in the neighbourhood of the end of a crack in an elastic body, when the body was acted on by forces tending to extend the crack. It should be noted, however, that any practical application of the theory must be made with extreme caution since the investigation shews that not only is the intensity of stress infinite in the neighbourhood of the end of the crack, but also the total stress in that neighbourhood is infinite.

The method of treatment employed does not involve the general theory of Biharmonic Analysis[1]); polar co-ordinates are used, the origin being at the end of the crack, and the flexure due to forces or couples applied along the edges of the crack is determined directly by Fourier methods. If the forces are applied elsewhere, they may be removed by appropriate particular solutions as is done in similar cases in the theory of Potential. This process reduces the applied forces (or couples) to a distribution along the edges of the crack.

The author has not seen any discussion of the problem here treated, but a method, involving an entirely different mode of attack, for the corresponding problem when the applied forces are in the plane of the plate, has been given by Muschelisvili[2]) as a case of his general theory of plane stress.

For the solution of the problem it is shewn below that it is sufficient to consider two cases only, viz:

(1) That in which a distribution of force is applied along the two edges of the crack (and perpendicular to the plane of the plate), this distribution being antisymmetrical with respect to the line of the crack, so that the force per unit length at a point P of one edge of the crack is equal and opposite to that at the geometrically coincident point P' of the other edge.

(2) That in which a distribution of couple is applied along the two edges of the crack, the direction of the axes of the couples being that of the line of the crack, and the distribution symmetrical with respect to that line, so that the couple per unit length at a point P of one edge is equal and opposite to that at the geometrically coincident point P' of the other edge.

If the distribution in either case is the same in direction as in magnitude, along the two edges of the crack, the method used in cases (1) and (2) may still be employed, the normal displacement being then — in the case of a force distribution, for example — an even instead of an odd function of the distance of the point from the crack. There is, however, no need to actually carry out the process in these cases. Consider, for example, the case in which equal forces in the same sense are applied at geometrically coincident points along the opposite edges of the crack. On account of the symmetry, the displacement on one side of the line of the crack can be taken as that due to the single concentrated force on that side when the crack is extended indefinitely, that is, when the line of the crack defines the

[1]) Reference may be made to A. E. H. Love: Biharmonic Analysis etc. Proc. Lond. Math. Soc. (2) 29, 1929. — N. Muschelisvili: „Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen“, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 13, Aug. 1933.

[2]) N. Muschelisvili: loc. cit.

unlimited straight boundary of a semi-infinite plate. The solution can, therefore, be written down. A similar conclusion is reached in the case of couples having the same sense of moment[3]).

If the distribution is along one side of the crack only, the addition of the results in the corresponding symmetrical and antisymmetrical cases will give the required solution.

Returning to case (1), it is evidently only necessary to consider in detail the elementary solution in which the applied force distribution is reduced to a pair of equal opposed concentrated forces at the geometrically coincident points P, P' on either edge of the crack. In case (2), in like manner, the essential solution is that for a pair of couples, equal in magnitude, but having opposite sense of moment, applied at the same two points. In either case, the integration along the crack of each of the sets of results obtained, will give the solution in the corresponding cases of continuous distribution.

§ 2. General notation. The plane of the plate is taken as the X, Y plane, the crack extending backwards from the origin along the X axis. The continuous distributions of force and couple are denoted by N^* and G^* respectively, and are applied along the two edges of the crack as described in § 1, the direction of N^* being normal to the plane of the plate, and that of the axis of G^* along the direction of the crack.

When the continuous distribution is reduced to a pair of concentrated forces or a pair of concentrated couples, these are denoted by F and L respectively and are applied at the points $x = -a$, $y = \pm 0$.

Figure 1 shows the general arrangement when the plate is subjected to a pair of concentrated forces.

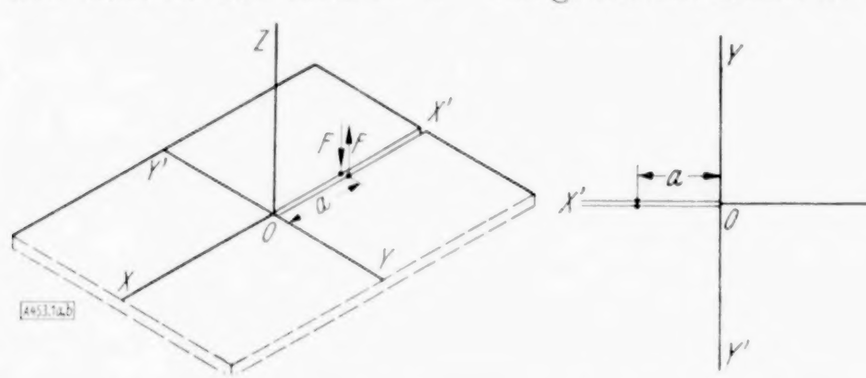


Figure 1a and 1b. General arrangement when the loading consists of a pair of concentrated forces.

The general notation used is that of A. E. H. Love, "Theory of Elasticity", third edition Chapter XXII, the standard equations employed being given in Art. 313 of that chapter.

§ 3. The expression of the normal displacement w, as a Fourier integral in the case of continuous force distribution. In this case the equation for the normal displacement w, of a point is

$$\nabla^4 w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

and, along the edges of the crack, the boundary conditions become[4]):

$$N^* = N - \frac{\partial H}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y}\left\{\nabla^2 w + (1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$$

and
$$G^* = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = 0,$$

where N^* and G^* represent the continuous distribution of stress over the edges of the crack, as explained in § 2, and D is a constant, given by $D = \frac{2}{3} E h^3/(1-\sigma^2)$, where $2h$ is the thickness of the plate, E is Young's Modulus for the material, and σ Poisson's ratio. If co-ordinates ϱ, Θ are used, where $\varrho = \log_e r$,

$$\nabla^2 w = e^{-2\varrho}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2}\right\}.$$

Now
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{\partial w}{r\,\partial \Theta}\right) \text{ along the boundary}$$

$$\left(\text{since when } \Theta = \pi,\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}\right)$$

$$= -e^{-\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(e^{-\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\right)\left(e^{-\varrho}\cdot\frac{\partial w}{\partial \Theta}\right)$$

$$= -e^{-3\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 2\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 1\right)\frac{\partial w}{\partial \Theta}.$$

[3]) The Elementary solutions required are given in A. Nadai: „Die elastischen Platten", S. 204.

[4]) Love: Theory of Elasticity, 3rd edition, Chap. XXII.

so that the boundary conditions become, along $\Theta = \pi$,

$$\frac{\partial}{\partial \Theta}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + (1-\sigma)\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 2\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 1\right) w\right\} = \frac{N^*}{D} e^{3\varrho} \quad \text{. . . . . (2)}$$

and

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} - (1-\sigma)\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 1\right)\frac{\partial w}{\partial \varrho} = 0 \quad \text{. . . . . (3).}$$

The method used in obtaining w from these equations is to take the basic case $N^* = \cos m\varrho$ and determine the corresponding elementary solution of $\nabla^4 w = 0$. The general solution can then be obtained as a Fourier Integral.

Since the forces are applied in opposite directions on the two edges of the crack the displacement will be an odd function of y. The elementary odd solution of $\nabla^4 w = 0$ corresponding to

$$N^* = \cos m\varrho = R(e^{-im\varrho}) \text{ \{where } R \text{ denotes 'real part of'\}}$$

is:

$$w = e^{-im\varrho}\{A \sinh m\Theta + B \sinh (m - 2i)\Theta\}.$$

Substituting in (2) and (3) we obtain

$$\frac{N^* e^{3\varrho}}{D} = -e^{-im\varrho}\{(1-\sigma)\, m (m-i)(m-2i) A \cosh m\Theta$$
$$+ (m-i)(m-2i)[4i + (1-\sigma)(m-2i)] B \cosh (m-2i)\Theta\}$$

and $(1-\sigma)\, m A \sinh m\Theta - i[4 + (1-\sigma)\, i\, m] B \sinh (m-2i)\Theta = 0$, i. e. since $\Theta = \pi$.

$$N^* = -D e^{-(im+3)\varrho}(m-i)(m-2i)\{m(1-\sigma)A + [4i + (1-\sigma)(m-2i)]B\} \cosh m\pi \quad . \quad (4)$$

and

$$0 = m(1-\sigma)A - [4i - (1-\sigma)m]B \quad \text{. . . . . (5).}$$

From (5) $\quad \dfrac{A}{4i - (1-\sigma)m} = \dfrac{B}{m(1-\sigma)} = C \text{ (say)} = \dfrac{m(1-\sigma)A + [4i + (m-2i)(1-\sigma)]B}{2im(1-\sigma)(3+\sigma)}$

(on multiplying the numerators of the fractions by the coefficients of A and B in (4)).

Therefore when

$$N^* = -D e^{-(3+im)\varrho}(m-i)(m-2i)\, 2im \cdot (1-\sigma)(3+\sigma)\, C \cosh m\pi,$$

then $\quad w = \quad C e^{-im\varrho}\{[4i - (1-\sigma)m] \sinh m\Theta + (1-\sigma)\, m \sinh (m-2i)\Theta\}.$

If we take $\quad C = -\dfrac{1}{D(m-i)(m-2i)\, 2im(1-\sigma)(3+\sigma)\cosh m\pi}$,

then corresponding to $N^* = e^{-(3+im)\varrho}$.

We have $\quad w = -\dfrac{[\{4i - (1-\sigma)m\} \sinh m\Theta + (1-\sigma)\, m \sinh (m-2i)\Theta]}{2D(1-\sigma)(3+\sigma)\, im(m-i)(m-2i)\cosh m\pi} e^{-im\varrho}$,

so that, in the general case, where

$$N^* = f(\varrho) = \frac{1}{\pi} e^{-3\varrho} R\left\{\int\limits_{m=0}^{m=\infty}\int\limits_{\zeta=-\infty}^{\zeta=\infty} e^{im(\zeta-\varrho)} f(\zeta)\, e^{3\zeta}\, d\zeta \cdot dm\right\},$$

we have

$$-2D(1-\sigma)(3+\sigma)\, w$$
$$= \frac{1}{\pi} R \int\limits_{m=0}^{m=\infty}\int\limits_{\zeta=-\infty}^{\zeta=\infty} e^{im(\zeta-\varrho)}\, e^{3\zeta} f(\zeta) \frac{\{4 + (1-\sigma)\, m i\} \sinh m\Theta - (1-\sigma)\, m i \sinh (m-2i)\Theta}{m(m-i)(m-2i)\cosh m\pi}\, d\zeta \cdot dm.$$

By changing i into $-i$ we can obtain the real part, so that

$$-4D(1-\sigma)(3+\sigma)\, w$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{im(\zeta-\varrho)}\, e^{3\zeta} f(\zeta) \frac{[\{4 + (1-\sigma)\, m i\} \sinh m\Theta - (1-\sigma)\, m i \sinh (m-2i)\Theta]}{m(m-i)(m-2i)\cosh m\pi}\, d\zeta \cdot dm$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-im(\zeta-\varrho)}\, e^{3\zeta} f(\zeta) \frac{[\{4 - (1-\sigma)\, m i\} \sinh m\Theta + (1-\sigma)\, m i \sinh (m+2i)\Theta]}{m(m+i)(m+2i)\cosh m\pi}\, d\zeta \cdot dm$$

and since, on putting $m = -m$, the second integral becomes identical with the first except that the limits for m are $-\infty$ and 0, instead of 0 and ∞ we obtain

$$w = -\frac{1}{4\pi D(1-\sigma)(3+\sigma)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i m(\zeta-\varrho)} e^{3\zeta} f(\zeta) \frac{[\{4+(1-\sigma)\, m\, i\} \sinh m\Theta - (1-\sigma)\, m\, i \sinh(m-2i)\Theta]}{m(m-i)(m-2i)\cosh m\pi} d\zeta \cdot dm$$

giving the normal displacement at any point within the plate due to a continuous distribution of force $N^* = f(\varrho)$ along the crack, as a Fourier Integral.

§ 4. Pair of opposed forces. Evaluation of the Fourier integral. If the distribution $f(\varrho)$ consists of a single pair of opposed forces F acting at the points $r = a$, $\Theta = \pm\pi$, we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\, e^{\zeta}\, d\zeta = F$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i m\zeta} f(\zeta)\, e^{3\zeta}\, d\zeta = F\, e^{i m\gamma}\, e^{2\gamma} \qquad \text{where } \gamma = \log_e a.$$

$$= a^2\, F\, e^{i m\gamma}$$

Therefore

$$w = -\frac{a^2 F}{4\pi D(1-\sigma)(3+\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i m(\gamma-\varrho)} \frac{\{4+(1-\sigma)\, m\, i\} \sinh m\Theta - (1-\sigma)\, m\, i \sinh(m-2i)\Theta}{m(m-i)\, m-2i)\cosh m\pi} dm \qquad (6).$$

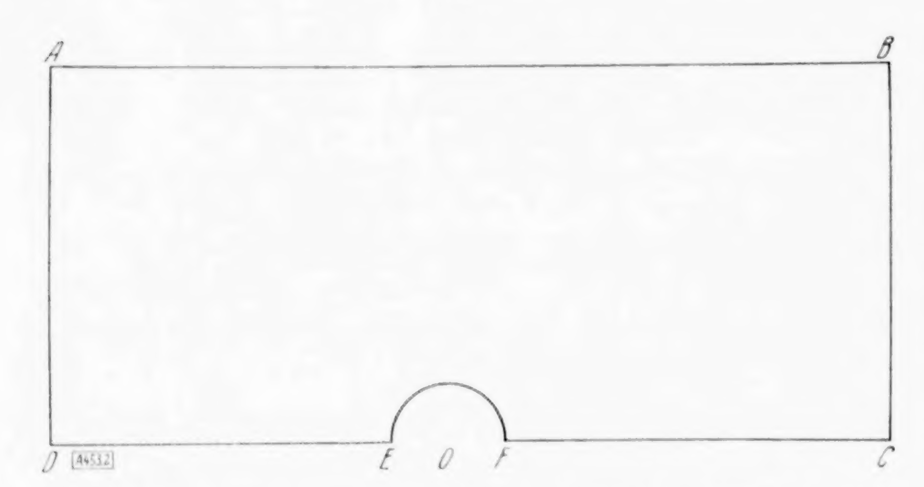


Figure 2. The contour chosen for the evaluation of the Fourier Integral.

In order to evaluate this integral we consider the contour whose boundaries are as shown in figure 2, the lines AB, BC, DA, being at an infinite distance from 0, and m being now treated as a complex variable.

The poles are at $m = i$, $2i$, and $\left(s+\frac{1}{2}\right) i$, where s is any $+^{ve}$ integer or zero. It can be shown that if $|\varrho| \leq \gamma$ i./e. $r \leq a$, the value of the integral taken along the bounding lines DA, AB, BC and the semicircle EF, is zero, and therefore we have in this case.

$$I_{x'0x} = 2\pi i \Sigma R.$$

The residue at $m = i$, on multiplication by $2\pi i$, gives

$$e^{-(\gamma-\varrho)} \frac{(3+\sigma)\, i \sin\Theta - (1-\sigma)\, i \sin\Theta}{i x - i x \cos\pi} 2\pi i = 4\pi\, e^{-(\gamma-\varrho)} (1+\sigma) \sin\Theta$$

and similarly that at $m = 2i$ gives

$$2\pi\, e^{-2(\gamma-\varrho)} (1+\sigma) \sin 2\Theta$$

and that at $m = \left(s+\frac{1}{2}\right) i \qquad (s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$

$$e^{-(s+1/2)(\gamma-\varrho)} \frac{\left[\left\{4-(1-\sigma)\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\} \sinh\left(s+\frac{1}{2}\right) i\Theta + (1-\sigma)\left(s+\frac{1}{2}\right) \sinh\left(s-\frac{3}{2}\right) i\Theta\right]}{\pi\cdot(i)^3 \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right) \sinh\left(s+\frac{1}{2}\right) i\pi} 2\pi i$$

$$= i\,(-1)^s\, e^{-(s+1/2)(\gamma-\varrho)}$$

$$\frac{\left[\left\{4-(1-\sigma)\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\} \{e^{(s+1/2)\, i\,\Theta} - e^{-(s+1/2)\, i\,\Theta}\} + (1-\sigma)\{e^{(s-3/2)\, i\,\Theta} - e^{-(s-3/2)\, i\,\Theta}\}\right]}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}$$

or, writing
$$z = r e^{i\theta} = e^{\varrho + i\theta}$$
and
$$z' = r e^{-i\theta} = e^{\varrho - i\theta}$$

$$= i(-1)^s \left\{ \frac{4(z/a)^{s+1/2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)} - \frac{(1-\sigma)(z/a)^{s+1/2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)} + \frac{(1-\sigma)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}(z/a)^{s+1/2}\cdot z'/z \right.$$
$$\left. - \frac{4(z'/a)^{s+1/2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)} + \frac{(1-\sigma)(z'/a)^{s+1/2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)} - \frac{(1-\sigma)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}(z'/a)^{s+1/2}\cdot z/z' \right\}.$$

Taking each term separately and summing from $s=0$ to $s=\infty$, we obtain for the z terms.

Series $\quad 4i(-1)^s \left\{ \frac{1}{2\left(s-\frac{3}{2}\right)} - \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)} \right\}(z/a)^{s+1/2}$

$$= i\left[\left\{-\frac{4}{3}\sqrt{z/a} + 4(z/a)^{3/2} - 2i(z/a)^2 \log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right\} + \left\{8\sqrt{z/a} - 4(z/a)\, i \log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right\}\right.$$
$$\left. + \left\{-2i\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right\}\right]$$
$$= 4i\left\{\frac{5}{3}\sqrt{z/a} + (z/a)^{3/2} - \frac{i}{2}\frac{(z+a)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right\}.$$

Series $\quad i(1-\sigma)(-1)^{s+1}\left\{\frac{1}{s-\frac{3}{2}} - \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\}(z/a)^{s+1/2}$

$$= i(1-\sigma)\left\{\left(\frac{2}{3}\sqrt{z/a} - 2(z/a)^{3/2} + i(z/a)^2\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right) + \left(-2\sqrt{z/a} + \frac{iz}{a}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right)\right\}$$
$$= 2i(1-\sigma)\left\{-\frac{2}{3}\sqrt{z/a} - (z/a)^{3/2} + \frac{i}{2}z\frac{(z+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right\}.$$

The remaining series may be obtained similarly, so that we have; the displacement w at any point (z, z') within, or on, a circle of radius a about the origin due to a pair of opposed forces applied at a distance a from the origin along the crack is given by:

$$\left.\begin{aligned}
w = -\frac{i a^2 F}{\pi D(1-\sigma)(3+\sigma)}&\left[\frac{1}{2}(1-\sigma)\left\{\frac{z'}{z}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z/a} + (z/a)^{3/2} - \frac{i}{2}z\frac{(z+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}\right)\right.\right. \\
&-\frac{z}{z'}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z'/a} + (z'/a)^{3/2} - \frac{i}{2}z'\frac{(z'+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}\right) \\
&-\quad \frac{2}{3}\sqrt{z/a} - (z/a)^{3/2} + \frac{i}{2}z\frac{(z+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}} \\
&\left.+\quad \frac{2}{3}\sqrt{z'/a} + (z'/a)^{3/2} - \frac{i}{2}z'\frac{(z'+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}\right\} \\
&+\quad \frac{5}{3}\sqrt{z/a} + (z/a)^{3/2} - \frac{1}{2}i\frac{(z+a)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}} \\
&-\quad \frac{5}{3}\sqrt{z'/a} - (z'/a)^{3/2} + \frac{1}{2}i\frac{(z'+a)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}} \\
&\left.-\pi\frac{(1+\sigma)}{2a}(z-z') - \frac{1}{4}\pi\frac{(1+\sigma)}{a^2}(z^2-z'^2)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (7).$$

In these formulae we suppose $\quad \log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}} \to 0$

and $\quad \log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}} \to 0,$

when $x\to 0$, $y\to 0$, and this convention fixes their value throughout the plate.

It is easy to verify that w satisfies the boundary equations

$$N - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \text{(except at } x = a,\ y = 0\text{)}$$

$$G = 0$$

along the crack, these being expressed for the purpose of verification in the form:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z'}\right)\left[4\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial z'} + (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial z'} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}\right)\right] = 0$$

and
$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(1-\sigma) + \frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}(1-\sigma) - 2\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial z'} = 0$$

respectively.

Passing on to the case of points outside the circle of radius a, the elementary odd solution of $V^4 w = 0$ used is that corresponding to $N^* = R(e^{i m \varrho})$ and is:

$$e^{i m \varrho}(A \sinh m\Theta + B \sinh(m + 2i)\Theta)\,.$$

Precisely the same method as that used in the first case, now gives

$$w = -\frac{a^2 F}{4\pi D(1-\sigma)(3+\sigma)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i m(\varrho-\gamma)}\frac{\{4-(1-\sigma)\,m\,i\}\sinh m\Theta + (1-\sigma)\,m\,i\sinh(m+2i)\Theta}{m(m+i)(m+2i)\cosh m\pi}\cdot dm\,.$$

Using the same contour as before, the poles are now at $m = \left(s + \frac{1}{2}\right)i$ where s is any $+ve$ integer or zero, and we obtain for the normal displacement of a point outside a circle of radius a about the origin:

$$\left.\begin{aligned} w = -\frac{i a^2 F}{4\pi D(1-\sigma)(3+\sigma)}&\left[\frac{1}{2}(1-\sigma)\left\{\frac{z'}{z}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z/a} + (z/a)^{3/2} + \frac{i}{2}z\frac{(z+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\right)\right.\right.\\ &-\frac{z}{z'}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z'/a} + (z'/a)^{3/2} + \frac{i}{2}z'\frac{(z'+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\right)\\ &-\frac{2}{3}\sqrt{z/a} - (z/a)^{3/2} - \frac{i}{2}z\frac{(z+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\\ &\left.+\frac{2}{3}\sqrt{z'/a} + (z'/a)^{3/2} + \frac{i}{2}z'\frac{(z'+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\right\}\\ &+\frac{5}{3}\sqrt{z/a} + (z/a)^{3/2} + \frac{1}{2}i\frac{(z+a)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\\ &\left.-\frac{5}{3}\sqrt{z'/a} - (z'/a)^{3/2} - \frac{1}{2}i\frac{(z'+a)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\right] \end{aligned}\right\}\quad (9).$$

The expressions (7) and (9) obtained for the normal displacement of points within and without the circle $r = a$, are merely two different forms of the same series, each holding over its own range of convergence, and as we would expect, both give the same value of w on the circle $r = a$.

§ 5. Opposed forces. Evaluation of w for some particular points and lines. We will now find the displacement in a number of special cases. For convenience write

$$w = -\frac{i a^2 F}{\pi D(1-\sigma)(3+\sigma)}w'.$$

1. At a large distance from 0.

Using (9) and retaining terms to the order of $\frac{1}{\sqrt{z}}$ in z, z' we have:

$$w' = \frac{1}{15}\sqrt{a}(1-\sigma)\left\{\left(\frac{z'}{z^{3/2}} - \frac{z}{z'^{3/2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z'}}\right)\right\} - \frac{8}{15}\sqrt{a}\left\{\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z'}}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

showing that w' is zero when the point is at a sufficiently large distance from 0.

2. Along the crack for $|z| < a$.

Putting $z = z'$ and $\sqrt{z} = -\sqrt{z'}$ in (7)

$$\begin{aligned} w' &= \frac{10}{3}\sqrt{\frac{z}{a}} + \frac{2\,z^{3/2}}{a^{3/2}} - i\,\frac{(z+a)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}{\sqrt{a}-i\sqrt{z}} \\ &= i\left\{\frac{10}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{2\,x^{3/2}}{a^{3/2}} - \frac{(a-x)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right\} \end{aligned} \qquad (11)$$

since along the crack $\sqrt{z} = r\,e^{i\pi/2} = i\sqrt{x}$, where x is $+^{ve}$. Thus at the origin the displacement is zero.

3. Along the crack for $|z| > a$

$$w' = i\left\{\frac{10}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{2\,x^{3/2}}{a^{3/2}} + \frac{(a-x)^2}{a^2}\log\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right\} \qquad (12).$$

When $x = a$

$$\text{Since}\quad \underset{x\to a}{\text{Lt.}}\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(x-a)^{-2}} = \underset{x\to a}{\text{Lt.}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}\,\frac{(x-a)^2}{-2}$$

$$= -\ \text{Lt.}\ \frac{(x-a)^2}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \to 0\,.$$

Therefore $w' = \frac{4}{3}\,i$, the same result being given by (11).

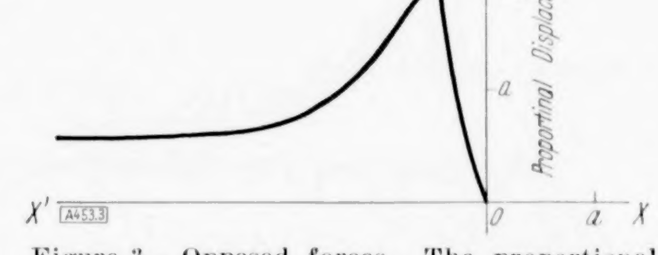


Figure 3. Opposed forces. The proportional variation in normal displacement along $x'0x$.

4. Along the continuation of the crack. Here we have, when $|z| \geqq a$ $w' = 0$.

The variation of the displacement along $x'0x$ is shown in figure (3).

§ 6. Opposed forces. Determination of the flexural stress couple G. The flexural and torsional stress couples G and H and the normal stress N resulting from the applied forces F may now be found across any chosen curve at any point within the plate. These stresses are measured per unit length of the arc chosen, the directions of G and H being respectively parallel and at right angles to it. The expressions for G, H, N are given in A. E. H. Love's Theory of Elasticity, p. 492, (3rd. Edition) namely:

$$G = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right\} \qquad (13),$$

$$H = D(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial \nu \cdot \partial s} \qquad (14),$$

$$N = -D\frac{\partial}{\partial \nu}\nabla^2 w \qquad (15),$$

where s is the arc chosen and ν the normal to it.

If the point is on the edge of the crack, and the curve under consideration is the bounding edge, (14) and (15) may be replaced by[5])

$$N^* = N - \frac{\partial H}{\partial x} = -D\left\{\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) + (1-\sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right\}.$$

For convenience in writing put $w' = \frac{1}{2}(1-\sigma)\,w_1 + w_2$ in (9)

where

$$\begin{aligned} w_1 = &\frac{z'}{z}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z/a} + (z/a)^{3/2} + i\,z\,\frac{(z+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\right. \\ &-\frac{z}{z'}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z'/a} + (z'/a)^{3/2} + i\,z'\,\frac{(z'+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\right) \\ &-\frac{2}{3}\sqrt{z/a} - (z/a)^{3/2} - i\,z\,\frac{(z+a)}{2\,a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}} \\ &+\frac{2}{3}\sqrt{z'/a} + (z'/a)^{3/2} + \frac{1}{2}\,z'\,\frac{(z'+a)}{a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}} \end{aligned}$$

[5]) Love, Theory of Elasticity, Art. 297.

and
$$w_2 = \frac{5}{3}\sqrt{z/a} + (z/a)^{3/2} + \frac{1}{2}\, i\, \frac{(z+a)^2}{a^2} \log \frac{\sqrt{z} + i\sqrt{a}}{\sqrt{z} - i\sqrt{a}}$$
$$- \frac{5}{3}\sqrt{z'/a} - (z'/a)^{3/2} - \frac{1}{2}\, i\, \frac{(z'+a)^2}{a^2} \log \frac{\sqrt{z'} + i\sqrt{a}}{\sqrt{z'} - i\sqrt{a}}.$$

Dealing with each stress in turn we have:

1. The flexural stress G.

a) taken tangentially to a circular arc of radius $r\,(> a)$ and centre the origin, (13) becomes:

$$G = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\,\partial\Theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\} = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(1-\sigma) + \nabla^2 w\right\}$$
$$= -c\,D(1-\sigma)\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\Theta^2}\right)\right\},$$

where c stands for $-\dfrac{i\,a^2 F}{\pi\,D(1-\sigma)(3+\sigma)}$.

On performing the differentiations, substituting and symplifying we obtain:

$$\left.\begin{aligned}
G = -c\,D(1-\sigma)\Bigg\{&\frac{z}{z'}\left\{\frac{5}{4\,a^{3/2}\sqrt{z}} - \frac{7}{12\sqrt{a}\cdot z^{3/2}} - \frac{\sqrt{z}}{4\,(z+a)\,a^{3/2}} + \frac{i}{2\,a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\right\}\\
&+\frac{z'}{z}\left\{-\frac{5}{4\,a^{3/2}\sqrt{z'}} + \frac{7}{12\sqrt{a}\cdot z'^{3/2}} + \frac{\sqrt{z'}}{4(z'+a)\,a^{3/2}} - \frac{i}{2\,a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\right\}\\
&+\frac{3}{4\,a^{3/2}\sqrt{z}} - \frac{1}{12\sqrt{a}\cdot z^{3/2}} + \frac{\sqrt{z}}{4\,a^{3/2}(z+a)} + \frac{i}{2\,a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\\
&-\frac{3}{4\,a^{3/2}\sqrt{z'}} + \frac{1}{12\sqrt{a}\cdot z'^{3/2}} - \frac{\sqrt{z'}}{4\,a^{3/2}(z'+a)} - \frac{i}{2\,a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\\
&+\frac{\sigma}{2}\Bigg\{\frac{z}{z'}\left(\frac{3}{2\,a^{3/2}\sqrt{z}} - \frac{1}{6\sqrt{a}\cdot z^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{z}}{a^{3/2}(a+z)} + \frac{i}{a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\right)\\
&+\frac{z'}{z}\left(-\frac{3}{2\,a^{3/2}\sqrt{z'}} + \frac{1}{6\sqrt{a}\cdot z'^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{z'}}{a^{3/2}(a+z')} - \frac{i}{a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\right)\\
&+\frac{5}{2\,a^{3/2}\sqrt{z}} - \frac{7}{6\sqrt{a}\cdot z^{3/2}} - \frac{\sqrt{z}}{2\,a^{3/2}(z+a)} + \frac{i}{a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}}\\
&-\frac{5}{2\,a^{3/2}\sqrt{z'}} + \frac{7}{6\sqrt{a}\cdot z'^{3/2}} + \frac{\sqrt{z'}}{2\,a^{3/2}(z'+a)} - \frac{i}{a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}}\Bigg\}\Bigg\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (16),$$

where no approximations have been made.

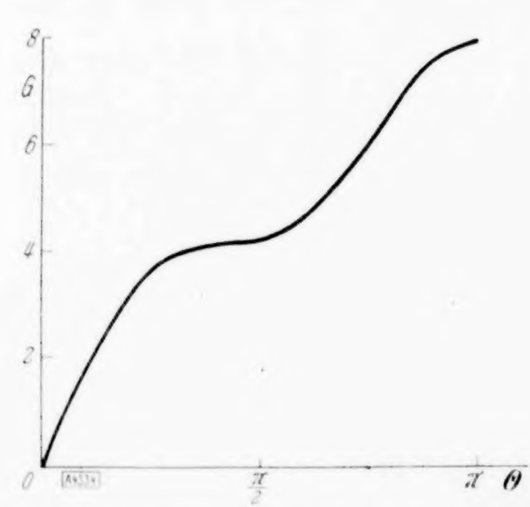


Figure 4. Opposed forces. The proportional variation in G over a circle of large radius and centre 0.

At a large distance from the origin, retaining terms down to the order of $\dfrac{1}{r^{5/2}}$, this becomes, when expressed in polar co-ordinates:

$$G = -\frac{c\,D(1-\sigma)}{10\,r^{5/2}}$$
$$\sqrt{a}\, i\left\{9\sin\Theta/2 - \sin\frac{5\,\Theta}{2} + \sigma\left(9\sin\frac{5\,\Theta}{2} - \sin\Theta/2\right)\right\}.$$

Putting $\sigma = \dfrac{1}{4}$ this gives on a circle of large radius

$$G = \alpha\,(\sin 5\,\Theta/2 + 7\sin\Theta/2).$$

Fig. 4 shows the proportional variation in G over such a circle.

b) The flexural stress taken tangentially to a circle of radius $r < a$ and centre the origin and hence the flexural couple at the origin.

If we use (7) we obtain an expression for the flexural stress within a circle of radius a exactly similar to (16), and if in this expression we retain terms up to the order $\frac{1}{\sqrt{r}}$, this gives on a small circle around the origin

$$G = -c\,D\,(1-\sigma)^2\,i\left\{\frac{\sin 3\Theta/2}{6\sqrt{a}\cdot r^{3/2}} - \frac{3}{2}\,\frac{\sin\Theta/2}{\sqrt{r}\,a^{3/2}} - \frac{7}{6}\,\frac{\sin\Theta/2}{\sqrt{a}\,r^{3/2}} + \frac{5}{2}\,\frac{\sin 3\Theta/2}{a^{3/2}\sqrt{r}}\right\}.$$

Hence the flexural couple at the origin

$$= \underset{r\to 0}{\mathrm{Lt.}} \int_0^{\pi} G\,r\,d\Theta = \underset{r\to 0}{\mathrm{Lt.}} \left\{-8\,i\,c\,D\,(1-\sigma)^2\left\{\frac{1}{3\sqrt{a\,r}} - \frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}}\right\}\right\}$$

showing that the flexural couple, as well as the flexural stress, is infinite at the origin.

c) The flexural stress taken along the continuation of the crack.

If we use Cartesian co-ordinates, we have, along $y=0$

$$\left.\begin{aligned} G &= -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = -D\left\{\nabla^2 w + (\sigma-1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} \\ &= -c\,D(1-\sigma)\left\{\frac{\partial^2 w_1}{\partial z\,\partial z'} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial z'^2} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z'^2} + 2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z\,\partial z'}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (16\text{a}).$$

$\left(\text{Since } \frac{\partial^2 w_2}{\partial z\,\partial z'} = 0\right)$

$=0$ whether $|z| \gtrless a$, so that G is zero along the continuation of the crack.

d) The flexural stress taken along the crack, and the resultant flexural couple at the point $z = a\,e^{i\pi}$.

If in (16a) we put $\Theta = \pi$, we see that $G=0$ at all points along the crack except at $z = a\,e^{i\pi}$, where it appears indeterminate. This stress, and also the resultant couple at the point are most easily discussed by altering the origin of co-ordinates.

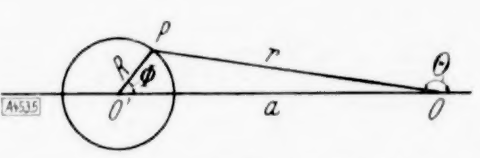


Figure 5. Change of origin.

With the point $z = a\,e^{i\pi}$ (0′) as origin, and the notation as shown in figure 5 we have

$$R\,e^{i\Phi} = a + r\,e^{i\Theta}$$

and

$$\frac{\partial w}{\partial R} = \cos(\varphi-\Theta)\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin(\varphi-\Theta)\frac{\partial w}{\partial\Theta},$$

$$\frac{\partial w}{\partial\varphi} = -R\sin(\varphi-\Theta)\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{R}{r}\cos(\varphi-\Theta)\frac{\partial w}{\partial\Theta}$$

with similar formulae for the derivatives of higher order.

The resultant couple at 0′ is given by

$$\underset{R\to 0}{\mathrm{Lt.}} \int_0^{\pi} G\,R\,d\varphi\,.$$

Since, in this expression, R is small, in obtaining G we may expand the individual terms arising, in powers of R, at the same time putting $\Theta=\pi$, $r=a$ in terms in zero or positive powers of R.

If this is done, we find $\int_0^{\pi} G\,r\,d\Phi = 0$, so that there is no resultant couple at the point of application of the external force F.

In order to determine the stress G at the same point, the same change of origin must be made, but here we work in Cartesian co-ordinates as in section (c) instead of in polar co-ordinates.

The transformed expression gives $G=0$ at the point.

§ 7. Opposed forces. Determination of the torsional stress couple H.

a) The torsional stress couple taken across a circular arc of radius $r > a$. From (14)

$$\left.\begin{aligned}
H &= D(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}\right) \\
&= \frac{c\,D(1-\sigma)}{r}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial r\,\partial\Theta} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial r\cdot\partial\Theta} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial w_1}{\partial\Theta} + \frac{\partial w_2}{\partial\Theta}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r\cdot\partial\Theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial\Theta}\right)\right\} \\
&= \frac{i\,c\,D(1-\sigma)}{r}\left\{\sqrt{\frac{z}{z'}}\left\{\frac{1}{4\sqrt{a\,z'}} - \frac{\sqrt{z'}}{4\sqrt{a}\sqrt{z'+a}} + \frac{i\,z}{2a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}} - \frac{z^{3/2}}{4\,a^{3/2}(z+a)}\right\}\right. \\
&\quad + \sqrt{\frac{z'}{z}}\left\{\frac{1}{4\sqrt{a\,z}} - \frac{\sqrt{z}}{4\sqrt{a}\sqrt{z+a}} + \frac{i\,z'}{2a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}} - \frac{z'^{3/2}}{4\,a^{3/2}(z'+a)}\right\} \\
&\quad - \frac{7}{12}\frac{1}{\sqrt{a\,z}} + \frac{5}{4\,a^{3/2}}\frac{z^{3/2}}{z'} - \frac{7}{12}\frac{1}{\sqrt{a\,z'}} + \frac{5}{4\,a^{3/2}}\frac{z'^{3/2}}{z} \\
&\quad - \sigma\left\{\sqrt{\frac{z}{z'}}\left(\frac{1}{4\sqrt{a\,z'}} - \frac{\sqrt{z'}}{4\sqrt{a}(z'+a)} - \frac{i\,z}{2a^2}\log\frac{\sqrt{z}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z}-i\sqrt{a}} - \frac{z^{3/2}}{4\,a^{3/2}(z+a)}\right)\right. \\
&\quad + \sqrt{\frac{z'}{z}}\left(\frac{1}{4\sqrt{a\,z}} - \frac{\sqrt{z}}{4\sqrt{a}(z+a)} - \frac{i\,z'}{2a^2}\log\frac{\sqrt{z'}+i\sqrt{a}}{\sqrt{z'}-i\sqrt{a}} - \frac{z'^{3/2}}{4\,a^{3/2}(z'+a)}\right) \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{12\sqrt{a\,z}} - \frac{3}{4\,a^{3/2}}\frac{z^{3/2}}{z'} + \frac{1}{12\sqrt{a\,z'}} - \frac{3}{4\,a^{3/2}}\frac{z'^{3/2}}{z}\right\}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (17),$$

where no approximations have been made.

At a large distance from the origin, retaining terms down to the order of $\frac{1}{r^{3/2}}$, this becomes

$$H = -\frac{i\,c\,D(1-\sigma^2)}{\sqrt{a}\cdot r^{3/2}}\cos\Theta/2\,.$$

The variation of H over a circle of large radius is shown in figure 6.

Figure 6. Opposed forces. The proportional variation in H over a circle of large radius and centre 0.

b) The torsional stress couple taken across a circle of radius $r < a$ and hence the torsional couple at the origin.

Using (7) instead of (9), we obtain an expression for H similar to (17), which is applicable within the circle of radius a. If in this we retain terms up to the order of $\frac{1}{\sqrt{r}}$, it becomes, when expressed in polar coordinates:

$$\left.\begin{aligned}
H = \frac{i\,c\,D(1-\sigma)}{r}&\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a\,r}}\cos 3\,\Theta/2 - \frac{7}{6}\frac{\cos\Theta/2}{\sqrt{a\,r}} + \frac{5}{2}\frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}}\cos 3\,\Theta/2 - \frac{\sqrt{r}\cos\Theta/2}{2\,a^{3/2}}\right. \\
&\left. - \sigma\left(\frac{1}{2}\frac{\cos 3\Theta/2}{\sqrt{a\,r}} + \frac{1}{6\sqrt{a\,r}}\cos\Theta/2 - \frac{3\sqrt{r}}{2\,a^{3/2}}\cos\frac{3\Theta}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}}\cos\Theta/2\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (18).$$

The torsional couple at the origin is given by:

$$\underset{r\to 0}{\text{Lt.}}\left[\int^{\pi} H\,r\,d\Theta\right] = \underset{r\to 0}{\text{Lt.}}\left[-\frac{8\,i\,c\,D}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a\,r}} + \frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}}\right)\right]$$

showing that both the torsional stress and the torsional couple at the origin, are infinite.

c) The torsional stress along the continuation of the crack.

Using Cartesian co-ordinates (14) becomes:

$$H = D(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial x\cdot\partial y} = i\,c\,D(1-\sigma)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z'^2}\right) + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial z'^2} - \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z'^2}\right)\right\} \quad (19)$$

which gives, since $\sqrt{z} = \sqrt{z'} = \sqrt{x}$ along $0\,x$,

$$H = i\,c\,D\,(1-\sigma^2)\left\{\frac{2}{a^{3/2}\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt{a}\cdot x^{3/2}} - \frac{2}{a^2}\operatorname{artan}\sqrt{\frac{a}{x}}\right\} \text{ when } x > a$$

and

$$= i\,c\,D\,(1-\sigma^2)\left\{\frac{2}{a^{3/2}\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt{a}\cdot x^{3/2}} + \frac{2}{a^2}\operatorname{artan}\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{a^2}\right\} \text{ when } x < a\,,$$

showing that H is zero at infinity, and, as also appears from (b), infinite at the origin.

d) The torsional stress across the crack and the resultant torsional couple at $a\,e^{i\pi}$. If we put $\Theta = \pi$ in (19), we obtain $H = 0$ along the crack except at $a\,e^{i\pi}$ where it appears indeterminate. The same method as that outlined in § 6 section (d) gives $H = 0$ at the point $z = a\,e^{i\pi}$ and the resultant couple there to be zero.

Figure 7 shows the proportional variation of H along $x'\,0\,x$.

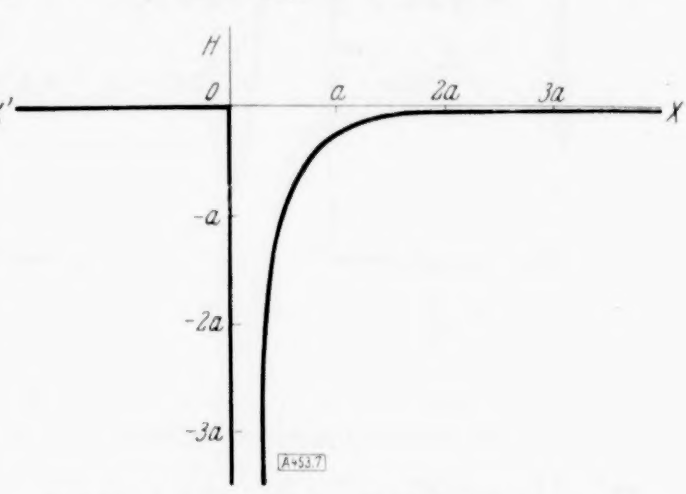


Figure 7. Opposed forces. The proportional variation in H along $x'\,0\,x$.

§ 8. Opposed forces. The normal stress N.

a) Taken along a circular arc of radius r, where r may be greater or less than a.

$$N = -\frac{c\,D\,(1-\sigma)}{2\sqrt{z\,z'}}\left\{\frac{1}{2\sqrt{a}\cdot z^{3/2}} - \frac{1}{2\,a^{3/2}\cdot\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{(z+a)\,a^{3/2}} - \frac{1}{2\sqrt{a}\cdot z'^{3/2}} + \frac{1}{2\,a^{3/2}\cdot\sqrt{z'}} - \frac{\sqrt{z'}}{(z'+a)\,a^{3/2}}\right\} \quad . \; . \; . \; (20).$$

At a large distance from 0, retaining terms down to the order of $\frac{1}{r^{7/2}}$, we have, using polar co-ordinates.

$$N = -i\,c\,D\,(1-\sigma)\frac{\sqrt{a}}{r^{7/2}}\sin 5\,\Theta/2$$

showing that N is zero at an infinite distance from 0.

Figure 8 shows the proportional variation in N over a circle of large radius. If r is small, retaining terms up to the order of $\frac{1}{\sqrt{r}}$ we have

$$N = -\frac{c\,D\,(1-\sigma)}{2}\left\{\frac{i\sin\Theta/2}{a^{3/2}\,r^{3/2}} - \frac{i\sin 3\Theta/2}{\sqrt{a}\,r^{5/2}} + \frac{2\,i\sin\Theta/2}{a^{5/2}\sqrt{r}}\right\}.$$

Thus the normal force at the origin is given by

$$\underset{r\to 0}{\mathrm{Lt.}}\int_0^\pi N\,r\,d\Theta = \underset{r\to 0}{\mathrm{Lt.}}\left[-\frac{i\,c\,D\,(1-\sigma)}{\sqrt{a\,r}}\left\{\frac{1}{a} - \frac{3}{r}\right\}\right]$$

which is infinite.

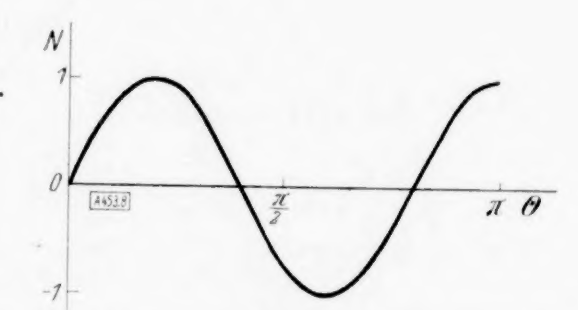


Figure 8. Opposed forces. The proportional variation in N over a circle of large radius and centre 0.

b) Along the axis $x'\,0\,x$.
Here we have

$$N = -\frac{i\,c\,D\,(1-\sigma)}{2}\left\{\frac{\cos 5\,\Theta/2}{\sqrt{a}\cdot r^{5/2}} - \frac{\cos 3\,\Theta/2}{a^{3/2}\,r^{3/2}} + \frac{1}{2\,a^{3/2}\cdot\sqrt{r}\cdot e^{i\Theta/2}(r\,e^{i\Theta}+a)} + \frac{1}{2\,a^{3/2}\cdot\sqrt{r}\cdot e^{-i\Theta/2}(r\,e^{-i\Theta}+a)}\right\}.$$

Along $0\,x$, the continuation of the crack, $\Theta = 0$

and
$$N = -\frac{i\,c\,D\,(1-\sigma)\sqrt{a}}{x^{5/2}\,(x+a)}$$

showing that N is infinite at the origin, as we would anticipate from (a).

Along the crack itself, $N - \frac{\partial H}{\partial x}$ replaces N on the outer side of the boundary[6]) and is zero except at $-a, 0$ where it is infinite, since there is a finite force applied.

It can be verified that the integration of N round the small circle whose centre is at $-a, 0$ gives the applied force F, as is to be expected.

Figure 9 shows the proportional variation in normal stress along $x' 0 x$, that along $x' 0$ being taken just inside the material.

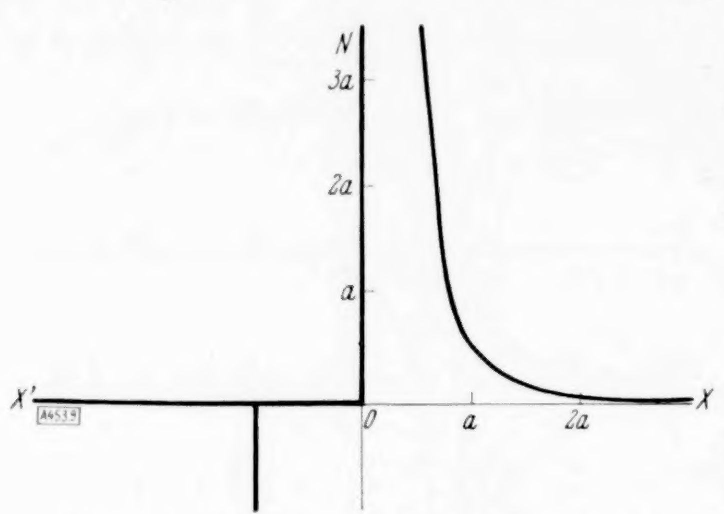


Figure 9. Opposed forces. The proportional variation in N along $x' 0 x$.

Opposed couples.

We pass on now to the second basic case mentioned in § 1, when the distribution along the crack consists of a pair of equal opposed concentrated couples applied at the points $x = -a$, $y = \pm 0$, the axis of the couples being parallel to the crack, and the forces forming them normal to the plate. Following the method used in dealing with a force distribution, we begin by obtaining the normal displacement under continuous couple distribution as a Fourier Integral, and then investigate its evaluation for the case of concentrated couple loading.

§ 9. The expression of the normal displacement, w, as a Fourier Integral in the case of continuous couple distribution. The equations (1), (2) and (3) of § 2 now become:

$$\nabla^4 (w) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + (1-\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 2 \right) w \right\} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (22),$$

$$-D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} - (1-\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial \varrho} \right\} e^{-2\varrho} = G^* \quad \ldots \ldots \quad (23).$$

Since the couples are applied in opposite senses over the two edges of the crack, the displacement is here an even function of y. The elementary even solution of $\nabla^4 w = 0$ corresponding to

$$G^* = \cos m \varrho = R(e^{-i m \varrho})$$

is:

$$w = e^{-i m \varrho} (A \cosh m \Theta + B \cosh (m - 2i) \Theta)$$

and, if we follow the method of § 3, we obtain in the general case where

$$G^* = f(\varrho),$$

$$w = -\frac{1}{4 \pi D (1-\sigma)(3+\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i m (\zeta - \varrho)} e^{2\zeta} f(\zeta) \left[\frac{\{4 - (1-\sigma)(m i + 2)\} \cosh m \Theta + i m (1-\sigma) \cosh (m - 2i) \Theta}{m \cdot m - i \cdot \cosh m \pi} \right] d\zeta \cdot dm$$

giving the normal displacement at any point within the plate due to a continuous distribution of couples $G^* = f(\varrho)$ along the crack, as a Fourier Integral.

§ 10. Pair of opposed couples. Result of the Fourier Integral. If the distribution $f(\varrho)$ consists of a pair of opposed couples L applied at the points $r = a$, $\Theta = \pm \pi$, this becomes

$$w = -\frac{a L}{4 \pi D (1-\sigma)(3+\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i m (\zeta - \varrho)} \frac{\{4 - (1-\sigma)(m i + 2)\} \cosh m \Theta + m i (1-\sigma) \cosh (m - 2i) \Theta}{m \cdot m - i \cdot \cosh m \pi} \cdot dm$$

and with the same contour as that used in § 4, the poles are now at $m = i$, $m = \left(s + \frac{1}{2}\right) i$, s being any integer or zero. The summation of the residues at the poles gives, for the displacement w at any point of the plate $z z'$ within a circle of radius a about the origin.

[6]) Love: Theory of Elasticity, 3rd. Edition, p. 365.

$$
\left.\begin{aligned}
w = -\frac{a\,L}{\pi\,D\,(1-\sigma)\,(3+\sigma)}\Bigg[& 2\sqrt{z/a} + i\,\frac{(z+a)}{a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z}} \\
& + 2\sqrt{z'/a} + i\,\frac{(z'+a)}{a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}} \\
& + \frac{1-\sigma}{2}\Bigg\{-\sqrt{z/a} - i\,\frac{(z+2a)}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z}} - \sqrt{z'/a} - i\,\frac{(z'+2a)}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}} \\
& + \frac{z'}{z}\left(-\sqrt{z/a} - \frac{i\,z}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}\right) + \sqrt{z/z'}\left(-\sqrt{z'/a} - \frac{i\,z'}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}\right)\Bigg\} \\
& - \frac{\pi}{2}\,\frac{(z+z')\,(1+\sigma)}{a} - \frac{\pi}{2}\,(1+\sigma)\Bigg]
\end{aligned}\right\} \quad (24)
$$

which will be found to satisfy the boundary conditions.

An exactly similar expression is obtained for the displacement of a point outside the circle of radius a.

§ 11. Opposed couples. The Values of w for some particular points and lines. If we choose the displacement along the continuation of the crack to be zero at infinity we obtain the following results.

1. At a large distance from 0

$$
w = \frac{a\,L}{\pi\,D\,(1-\sigma)\,(3+\sigma)}\left\{\frac{4}{3}\left\{\sqrt{\frac{a}{z}} + \sqrt{\frac{a}{z'}}\right\} - \frac{(1-\sigma)}{2}\left\{\frac{5}{3}\left(\sqrt{\frac{a}{z}} + \sqrt{\frac{a}{z'}}\right) - \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{a}{z}}\,e^{-2i\theta} + \sqrt{\frac{a}{z'}}\,e^{2i\theta}\right)\right\}\right\}.
$$

2. Along the crack a) $|z| < a \qquad w = \dfrac{L\,(1+\sigma)\,(z+a)}{D\,(1-\sigma)\,(3+\sigma)}$,

b) $|z| > a \qquad w = 0$.

3. Along $+^{\text{ve}}\,0x$.

a) $|z| < a \qquad w = \dfrac{a\,L\,(1+\sigma)}{\pi\,D\,(1-\sigma)\,(3+\sigma)}\left\{\dfrac{\pi}{a}\,(z+a) - 2\sqrt{z/a} - 2\,\dfrac{(z+a)}{a}\,\operatorname{artan}\sqrt{z/a}\right\}$,

b) $|z| > a \qquad w = \dfrac{a\,L\,(1+\sigma)}{\pi\,D\,(1-\sigma)\,(3+\sigma)}\left\{-2\sqrt{z/a} + 2\,\dfrac{(z+a)}{a}\,\operatorname{artan}\sqrt{z/a}\right\}$.

We obtain from (2) and (3) figure 10 which shews the variation in the displacement along $x'0x$.

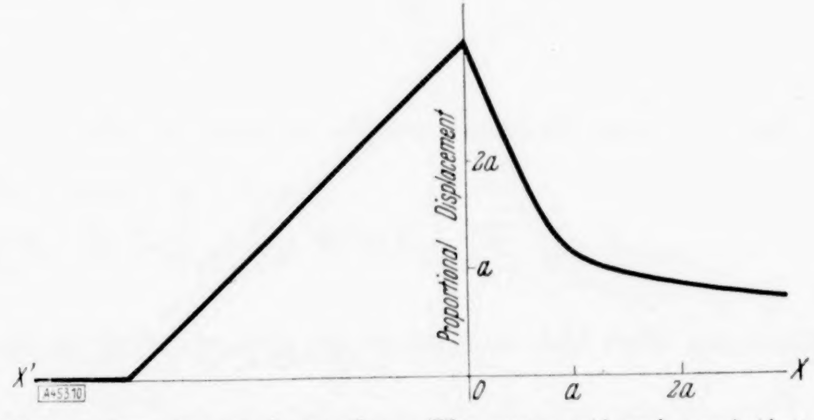


Figure 10. Opposed couples. The proportional variation normal displacement along $x'0x$.

§ 12. Opposed couples. The flexural stress couple G. Since G, H and N can be so written that only the second order derivatives occur, so that the linear, constant and logarithmic terms which constitute the difference between the two expressions for w in the cases $|z| \gtrless a$, disappear, either form of w may be used to obtain the stress at a point.

We therefore write

$$
w = c\left\{\frac{1}{2}\,(1-\sigma)\,w_1 + w_2\right\},
$$

where

$$
c = -\frac{a\,L}{\pi\,D\,(1-\sigma)\,(3+\sigma)},
$$

$$
\begin{aligned}
w_1 = \frac{z'}{z}\left\{-\sqrt{z/a} - \frac{i\,z}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z}}\right\} + \frac{z}{z'}\left\{-\sqrt{z'/a} - \frac{i\,z'}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}\right\} \\
-\sqrt{z/a} - \frac{i\,z}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z}} - \sqrt{z'/a} - i\,\frac{(z'+2a)}{2a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}
\end{aligned}
$$

and

$$
w_2 = 2\sqrt{z/a} + i\,\frac{(z+a)}{a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z}} + 2\sqrt{z'/a} + i\,\frac{(z'+a)}{a}\log\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{z'}}{\sqrt{a}+i\sqrt{z'}}.
$$

We obtain the following results:

a) The flexural stress G taken tangentially to a circular arc of radius r and centre the origin. On performing the differentiation we have:

$$
\begin{aligned}
G = -\frac{c\,D(1-\sigma)}{4}\Bigg\{\frac{z}{z'}\Bigg\{ & -\frac{3}{\sqrt{a}\cdot z^{3/2}}+\frac{3}{\sqrt{a}\,z\,(z+a)}+\frac{\sqrt{a}}{2\,z^{3/2}\,(z+a)}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z}\,(z+a)^2}\Bigg\} \\
& +\frac{z'}{z}\Bigg\{\frac{-3}{\sqrt{a}\cdot z'^{\,3/2}}+\frac{3}{\sqrt{a}\,z'\,(z'+a)}+\frac{\sqrt{a}}{2\,z'^{\,3/2}\,(z'+a)}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z'}\,(z'+a)^2}\Bigg\} \\
& +\frac{2}{\sqrt{a}\cdot z^{3/2}}-\frac{3}{2\sqrt{a}\,z\,(a+z)}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}\,(a+z)^2} \\
& +\frac{2}{\sqrt{a}\cdot z'^{\,3/2}}-\frac{3}{2\sqrt{a}\,z'\,(a+z')}+\frac{\sqrt{z'}}{\sqrt{a}\,(a+z')^2} \\
& +\sigma\Bigg\{\frac{z}{z'}\left(-\frac{1}{\sqrt{a}\cdot z^{3/2}}-\frac{\sqrt{a}}{2\,z^{3/2}\,(z+a)}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z}\,(z+a)^2}+\frac{1}{\sqrt{a}\,z\,(z+a)}\right) \\
& +\frac{z'}{z}\left(-\frac{1}{\sqrt{a}\cdot z'^{\,3/2}}-\frac{\sqrt{a}}{2\,z'^{\,3/2}\,(z'+a)}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z'}\,(z'+a)^2}+\frac{1}{\sqrt{a}\,z'\,(z'+a)}\right) \\
& -\frac{5}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a}\,z\,(a+z)}-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}\,(z+a)^2}+\frac{7}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a}\,z^{3/2}} \\
& -\frac{5}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a}\,z'(a+z')}-\frac{\sqrt{z'}}{\sqrt{a}\,(z'+a)^2}+\frac{7}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a}\cdot z'^{\,3/2}}\Bigg\}\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (25).
$$

b) The flexural stress tangential to a circle of small radius with centre the origin. Retaining terms to the order $\frac{1}{\sqrt{r}}$ we have, using polar co-ordinates,

$$
\begin{aligned}
G = -\frac{c\,D}{4}(1-\sigma)\Bigg\{ & -\frac{5\cos\Theta/2}{\sqrt{a}\,r^{3/2}}-\frac{3\cos\Theta/2}{\sqrt{r}\,a^{3/2}}+\frac{7\cos 3\,\Theta/2}{\sqrt{r}\,a^{3/2}}+\frac{\cos 3\,\Theta/2}{\sqrt{a}\,r^{3/2}} \\
& +\sigma\left(-\frac{3\cos\Theta/2}{\sqrt{a}\,r^{3/2}}+\frac{\cos 3\,\Theta/2}{\sqrt{r}\,a^{3/2}}-\frac{5\cos\Theta/2}{\sqrt{r}\,a^{3/2}}+\frac{7\cos 3\,\Theta/2}{\sqrt{a}\,r^{3/2}}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Therefore the flexural couple at the origin

$$
= \mathop{\mathrm{Lt.}}_{r\to 0}\int_0^{\pi} G\,r\,d\Theta = \mathop{\mathrm{Lt.}}_{r\to 0}\left\{c\,D(1-\sigma)\,\frac{8}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a\,r}}+\frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}}\right)\right\},
$$

showing that the resultant couple, as well as the stress, is infinite at the origin.

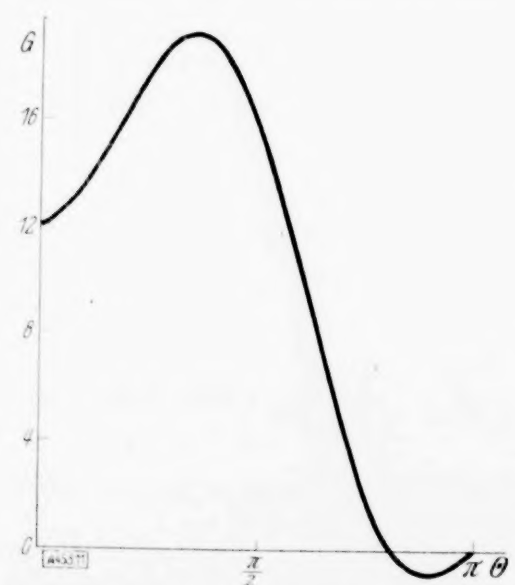


Figure 11. Opposed couples. The proportional variation in G over a circle of large radius and centre 0.

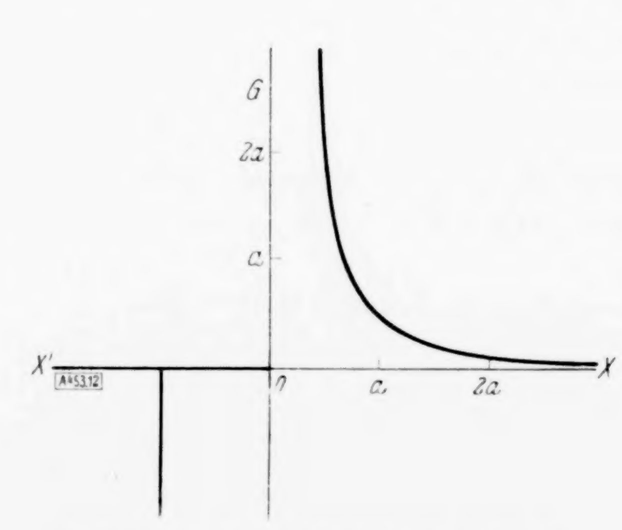


Figure 12. Opposed couples. The proportional variation in G along $x'\,0\,x$.

c) At a large distance from 0, we obtain from (25)

$$G = \frac{c D (1-\sigma)}{4 r^{5/2}} \left\{ 3 \cos \Theta/2 + \cos \frac{5\Theta}{2} + \sigma \left(5 \cos \Theta/2 - 9 \cos \frac{5\Theta}{2} \right) \right\}.$$

The proportional variation G over a circle of large radius is shown in figure 11, σ being taken as $\cdot 25$. It will be seen that the maximum stress occurs at about 63° to $0x$.

d) Along the continuation of the crack where $\Theta = 0$

$$G = -\frac{c D (1-\sigma)(3+\sigma)\sqrt{a}}{x^{3/2}(x+a)},$$

where x varies from zero to infinity.

e) Along the crack itself where $\Theta = \pi$. $G = 0$ except at the point $z = a e^{i\pi}$, where by the method of § 6 (d) it may be shown to tend to infinity. By the same method we may verify that the resultant couple at $a e^{i\pi}$ is equal to the applied couple L.

Figure 12 shows the proportional variation in G along $x' 0 x$.

§ 13. Opposed couples. The torsional stress H. For the torsional stress couple H we obtain the following results:

a) Across an arc of a circle of radius r, where r varies from zero to infinity.

$$\left. \begin{aligned} H = \frac{i c D (1-\sigma)}{4\sqrt{z z'}} \Bigg\{ & 4 \sqrt{\frac{z}{z'}} \left\{ \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}(z+a)} - \frac{1}{\sqrt{a z}} \right\} - 4 \sqrt{\frac{z'}{z}} \left\{ \frac{\sqrt{z'}}{\sqrt{a}(z'+a)} - \frac{1}{\sqrt{a z'}} \right\} \\ & + (1-\sigma) \Bigg[\sqrt{\frac{z}{z'}} \left\{ \frac{\sqrt{a z}}{(a+z)^2} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}(a+z)} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z}(a+z)} \right\} \\ & + \sqrt{\frac{z'}{z}} \left\{ \frac{z^{3/2}}{\sqrt{a}(z+a)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{z}}{(a+z)\sqrt{a}} - \frac{3}{2\sqrt{a z}} \right\} - \frac{1}{\sqrt{a z}} \\ & - \sqrt{\frac{z'}{z}} \left\{ \frac{\sqrt{a z'}}{(a+z')^2} - \frac{\sqrt{z'}}{\sqrt{a}(a+z')} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z'}(a+z')} \right\} \\ & - \sqrt{\frac{z}{z'}} \left\{ \frac{z'^{3/2}}{\sqrt{a}(z'+a)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{z'}}{(a+z')\sqrt{a}} - \frac{3}{2\sqrt{a z'}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{a z'}} \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \right\} \quad (26).$$

b) Across a circle of small radius with centre the origin.

Using polar co-ordinates and retaining terms up to the order of $\frac{1}{\sqrt{r}}$ we have.

$$\begin{aligned} H = \frac{c D (1-\sigma)}{4 r} \Bigg\{ & \frac{8}{\sqrt{a r}} \sin \Theta/2 - 8 \sqrt{r/a^3} \sin 3\Theta/2 \\ & + (1-\sigma) \left\{ -\frac{3 \sin \Theta/2}{\sqrt{a r}} + \frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}} \sin 3\Theta/2 - \frac{3}{\sqrt{a r}} \sin \frac{3\Theta}{2} + \frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}} \sin \frac{\Theta}{2} \right\} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Thus the torsional couple at the origin is given by

$$\underset{r \to 0}{\mathrm{Lt.}} \int_0^\pi H r \, d\Theta = \underset{r \to 0}{\mathrm{Lt.}} \left\{ 2 c D (1-\sigma^2) \left(\frac{1}{\sqrt{a r}} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{r}}{a^{3/2}} \right) \right\}$$

showing that the torsional couple, as well as the torsional stress, is infinite at the origin.

c) At a large distance from 0.

Retaining terms to the order of $\frac{1}{r^{5/2}}$ we have

$$H = \frac{c D (1-\sigma)}{4 r} \left\{ -\frac{8\sqrt{a}}{r^{3/2}} \sin \Theta/2 + 5(1-\sigma) \frac{\sqrt{a}}{r^{3/2}} (\sin \Theta/2 - \sin 5\Theta/2) \right\}.$$

The proportional variation in H over a circle of large radius is shown in figure 13, σ being taken as $\cdot 25$.

d) Across the continuation of the crack $H = 0$.

e) Across the crack itself $H = -\frac{2\sqrt{a}\, c\, D\,(1-\sigma)}{r^{3/2}\,(a-r)}$, where r varies from zero to infinity.

The method of § 6 (d) shows that H is infinite at $z = a\, e^{i\pi}$, but that the resultant torsional couple there is zero.

Figure 14 shows the proportional variation in H along $x'\,0\,x$.

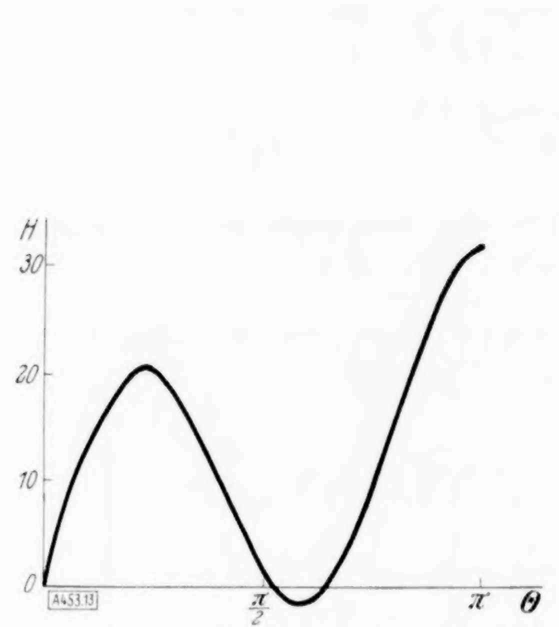


Figure 13. Opposed couples. The proportional variation in H over a circle of large radius and centre 0.

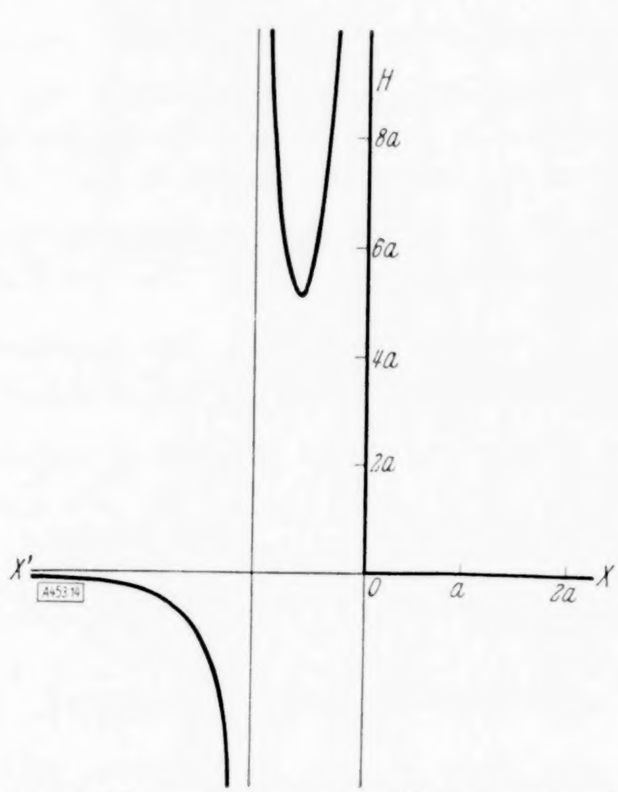


Figure 14. Opposed couples. The proportional variation in H along $x'\,0\,x$.

§ 14. Opposed couples. The normal stress N. For the normal stress N, we have:

a) Across an arc of radius r, $r > 0$,

$$N = -\frac{c\,D\,(1-\sigma)}{2}\left\{\sqrt{\frac{z}{z'}}\left\{\frac{2}{\sqrt{a}\,z\,(a+z)^2} + \frac{1}{\sqrt{a}\,z^{3/2}\,(a+z)} + \frac{3}{\sqrt{a}\cdot z^{5/2}}\right\} + \sqrt{z'/z}\left\{\frac{2}{\sqrt{a}\,z'\,(a+z')^2} + \frac{1}{\sqrt{a}\,z'^{\,3/2}\,(a+z')} + \frac{3}{\sqrt{a}\cdot z'^{\,5/2}}\right\}\right\} \quad . \; . \; . \; (27).$$

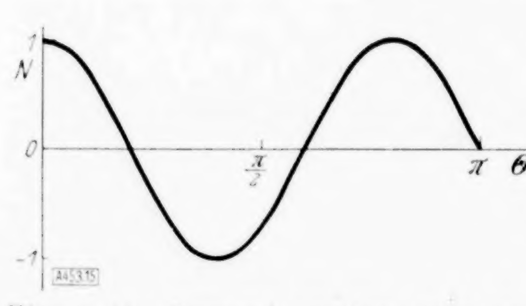


Figure 15. Opposed couples. The proportional variation in N over a circle of large radius and centre 0.

b) When r is small this becomes, in polar co-ordinates

$$N = -c\,D\,(1-\sigma)\left\{\frac{\cos\Theta/2}{a^{3/2}\,r^{3/2}} + \frac{\cos\Theta/2}{a^{5/2}\sqrt{r}} - \frac{3\cos 3\,\Theta/2}{\sqrt{a}\,r^{5/2}}\right\}.$$

At the origin we therefore have the resultant force

$$= \underset{r\to 0}{\mathrm{Lt.}}\int_0^{\pi} N\,r\,d\,\Theta = \underset{r\to 0}{\mathrm{Lt.}}\left\{-\frac{2\,c\,D\,(1-\sigma)\,(r+a)}{a^{3/2}\,r^{3/2}}\right\}$$

which is infinite.

c) When r is large, if we retain terms to the order $\frac{1}{r^{7/2}}$ we obtain

$$N = 5\,c\,D\,(1-\sigma)\,\frac{\sqrt{a}}{r^{7/2}}\cos 5\,\Theta/2\,.$$

The proportional variation in N over a circle of large radius is shown in figure 15.

d) Across the line $\Theta = 0$, $N = 0$.

e) Across the crack we have $N = \frac{(1-\sigma) c D (3a - 5r)}{r^{5/2} (a-r)^2}$, $(r > 0)$ indicating that N is infinite at the point of application of the couple. The method of § 6 (d) shows this to be the case, and shows in addition that $\int_0^\pi N R \, d\varphi$ tends to infinity. This result must be expected, as will be seen if we consider the equilibrium of a small semicircular piece of the plate

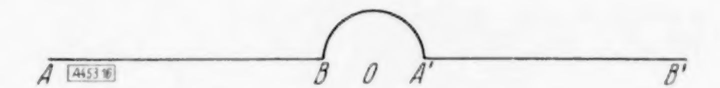


Figure 16. Equilibrium of a small piece of plate.

surrounding the point under consideration, as in figure 16. Such a piece may be considered to be under the action of the following normal forces:

1. $\int N R \, d\varphi$, taken around the semicircular boundary.

2. H_B and $-H_{A'}$, which represent the shearing stresses applied by the rest of the disc at B and A' respectively.

Thus, since there is no external force applied at $0'$, the algebraic sum of these forces must be zero. As H_B and $-H_{A'}$ both tend to infinity, when R tends to infinity $\int N R \, d\varphi$ must be infinite also. The actual balancing of the forces may be verified without difficulty if in the method of § 6 (d) we retain terms to the order $\frac{1}{R}$.

Figure 17 shows the proportional variation of normal stress N along $x'0x$, that along $x'0$ being the stress just inside the boundary.

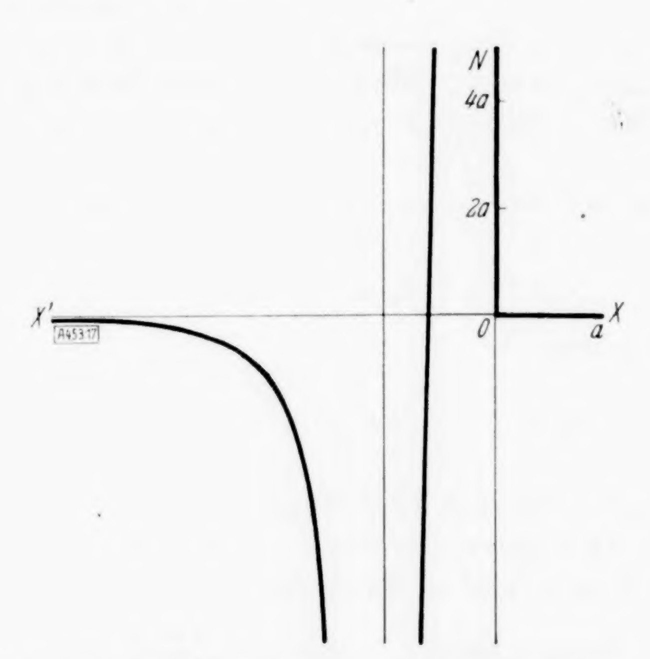


Figure 17. Opposed couples. The proportional variation in N along $x'0x$.

In conclusion I wish to thank Mr. J. H. Michell who, in addition to giving me access to an unpublished paper of his own on the subject, assisted me by much valuable discussion.

The work was carried out in the Department of Mathematics of the Melbourne University under the terms of a State Government Research Grant. 453

Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken.

(The Axis of no Torsional Moment in a Beam Bent by a Transverse Load.)

Von *W. L. Schwalbe* in Urbana, Illinois, U. S. A.

Das Problem, die der Balkenachse parallele Gerade in einem Balken zu finden, durch welche die Wirkungslinie einer den Balken biegenden Einzellast hindurchgehen muß, wenn der Balken ohne gleichzeitige Verdrehung gebogen werden soll, ist mit guter Näherung und in einfacher Weise für solche Balken gelöst worden, bei denen der Querschnitt in einer Dimension (Dicke) klein ist gegen die anderen Dimensionen. Zur Bezeichnung der genannten Geraden ist das Wort Biegungsachse vorgeschlagen worden[1]). Der Ausdruck „torsionsfreie Achse" ist vielleicht anschaulicher. In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur Bestimmung dieser Achse dargestellt. Die Methode ist für alle Querschnittsformen anwendbar, wenn auch im folgenden der einfacheren Darstellung wegen ein Querschnitt angenommen wird, der zu einer seiner Hauptträgheitsachsen symmetrisch ist.

Um das Problem zu formulieren, betrachten wir einen freikragenden Balken (Abb. 1), der an seinem freien Ende durch Kräfte belastet wird, die eine vertikale Resultierende P haben; diese wirke in einer Ebene, die zu der Hauptträgheitsachse (x-Achse) des Querschnitts senkrecht steht. Die Lage dieser Lastebene ist so zu bestimmen, daß der Balken senkrecht zur x-Achse ohne Torsion gebogen wird.

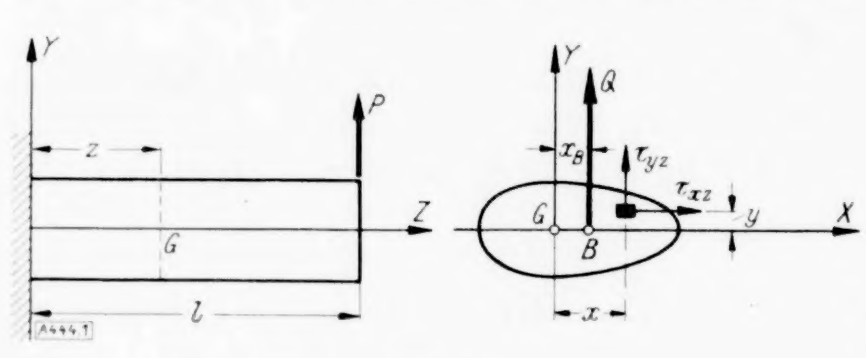


Abb. 1.

Wenn wir einen Querschnitt in der Entfernung z vom eingespannten Ende des Balkens betrachten, so muß, da das Balkenstück von z bis l im Gleichgewicht ist, die Querkraft Q als Resultierende aller Scherkräfte in dem betrachteten Querschnitt der Last P gleich sein und in der gleichen Ebene liegen wie P. Wir bezeichnen mit x_B den Abstand der Wirkungslinie der Querkraft Q vom Schwerpunkt G und stellen uns die Aufgabe, diesen Abstand x_B zu bestimmen.

In Übereinstimmung mit St. Venants Lösung für diese Art Biegungsprobleme nehmen wir an, daß

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

ist und daß die Biegungsspannung

$$\sigma_z = -\frac{Q}{J}(l-z)\,y$$

wird (J = Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die x-Achse). Aus den Gleichgewichtsbedingungen der Elastizitätstheorie folgt dann, daß die Schubspannungskomponenten τ_{zx} und τ_{zy} nur Funktionen von x und y sind, die der Gleichung

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{Q\,y}{J} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügen müssen.

Die Oberfläche des Balkens ist abgesehen von den Endflächen kräftefrei, woraus die Randbedingung

$$\tau_{zx}\cos(n,x) + \tau_{zy}\cos(n,y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

folgt, wo n die Normale an den Umriß des Balkenquerschnitts ist.

Die Kompatibilitätsbedingungen zwischen den Dehnungen ε und den Winkeländerungen γ

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right\}$$

[1]) A. Eggenschwyler: „Biegungsachse", Schweiz. Bauz., Bd. 76 (1920), S. 266.

reduzieren sich unter Berücksichtigung der Spannungs-Dehnungs-Gleichungen

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}; \qquad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

(G = Schubmodul) auf

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = \frac{-2\,G\,Q\,x}{E\,J\,m} + G\,c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(E = Elastizitätsmodul, m = Poissonsche Querkontraktionszahl), wo c eine noch zu bestimmende Integrationskonstante ist.

Um die Gl. (1) und (3) mit der Randbedingung (2) zu integrieren, führen wir zwei Spannungsfunktionen $\varphi(x, y)$ und $F(x, y)$ ein, indem wir

$$\tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi + F), \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial}{\partial x}(\varphi + F) - \frac{Q\,y^2}{2\,J}$$

setzen. Dieser Ansatz erfüllt die Gl. (3), wenn

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2\,G\,Q\,x}{E\,J\,m} + G\,c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

ist. Damit die Randbedingung (2) erfüllt ist, muß am Rande des Querschnittes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\,x}{d\,s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d\,y}{d\,s} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{d\,x}{d\,s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d\,y}{d\,s} + \frac{Q\,y^2}{2\,J}\frac{d\,x}{d\,s} = 0,$$

oder

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\,s} + \frac{d\bar{F}}{d\,s} = -\frac{Q\,y^2}{2\,J}\frac{d\,x}{d\,s}$$

sein ($\bar{\varphi}$ und $\bar{F}$ sind die Randwerte).

Die Form der Gl. (2a) und (3a) legt es nahe, das System der Schubspannungen τ_{zx}, τ_{zy} als Summe zweier Systeme

$$\tau_{zx} = \tau'_{zx} + \tau''_{zx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a),$$

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} + \tau''_{zy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,b)$$

aufzufassen, wo

$$\tau'_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \tau'_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{Q\,y^2}{2\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,c),$$

$$\tau''_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \tau''_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,d)$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,a),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2\,G\,Q\,x}{E\,J\,m} + G\,c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,b)$$

ist, mit den Randbedingungen

$$\frac{d\,\bar{\varphi}}{d\,s} = -\frac{Q\,y^2}{2\,J}\frac{d\,x}{d\,s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a),$$

$$\frac{d\,\bar{F}}{d\,s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,b).$$

Das resultierende Moment der Querkraft Q in bezug auf den Schwerpunkt ist gleich dem Integral über die Momente der Schubspannungen, genommen über den gesamten Querschnitt A; also

$$Q\,x_B = -\iint_A (\tau_{zx}\,y - \tau_{zy}\,x)\,d\,x\,d\,y$$

bzw. nach Zerlegung der Schubspannungen:

$$Q\,x_B = -\iint_A (\tau'_{zx}\,y - \tau'_{zy}\,x)\,d\,x\,d\,y - \iint_A (\tau''_{zx}\,y - \tau''_{zy}\,x)\,d\,x\,d\,y \quad . \quad . \quad (7).$$

Setzt man die Ausdrücke für die Schubspannungen aus (4c) und (4d) ein, so erhält man

$$Q\,x_B = -\iint_A \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,x + \frac{Q}{2\,J}\,x\,y^2\right\}d\,x\,d\,y - \iint_A \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\,y + \frac{\partial F}{\partial x}\,x\right\}d\,x\,d\,y \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a).$$

Nach Gl. (5) ist es evident, daß das zweite Integral in (7a) das resultierende Moment von zwei reinen, durch Scherkräfte erzeugten Momenten ist. Da nach Voraussetzung keine Torsion im Balken auftreten soll, müssen diese beiden Momente sich aufheben, d. h. es ist:

$$\iint \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\, y + \frac{\partial F}{\partial x}\, x\right\} dx\, dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7\,\mathrm{b}).$$

Die Integrationskonstante c in (5) ist so zu bestimmen, daß (7b) erfüllt ist. Aus (7a) folgt dann

$$Q\, x_B = -\iint_A \left\{ y\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{Q\, x\, y^2}{2J} \right\} dx\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Durch partielle Integration läßt dies Integral sich umformen zu

$$Q\, x_B = -\frac{Q\, J_{x y^2}}{2J} + \int \bar{\varphi}\, y\, dx - \int \bar{\varphi}\, x\, dy + 2V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8\,\mathrm{a}),$$

wo
$$J_{x y^2} = \iint_A x\, y^2\, dx\, dy, \qquad V = \iint_A \varphi\, dx\, dy$$

und die Integrale $\int \bar{\varphi}\, y\, dx$, $\int \bar{\varphi}\, x\, dy$ um den Rand des Querschnittes zu nehmen sind.

Bilden wir die Resultierende der Schubspannungen, so erhalten wir

für die y-Komponente:

$$\iint \tau'_{zy}\, dx\, dy = -\frac{2}{3} \int \bar{\varphi}\, dy = Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

für die x-Komponente:

$$\iint \tau'_{zx}\, dx\, dy = \int \bar{\varphi}\, dx = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Für die Berechnung der Abszisse x_B des Schubmittelpunktes bietet die Auswertung der Integrale

$$J = \iint y^2\, dx\, dy, \quad J_{x y^2} = \iint x\, y^2\, dx\, dy, \quad \int \bar{\varphi}\, y\, dx \;\text{ und }\; \int \bar{\varphi}\, x\, dy$$

keine Schwierigkeiten. Das Integral $V = \iint \varphi\, dx\, dy$ kann nicht ohne weiteres ausgerechnet werden, da φ in den inneren Punkten des Querschnittes nicht bekannt ist. Dazu ist die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

mit der Randbedingung

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d s} = -\frac{Q\, y^2}{2J}\, \frac{d x}{d s}$$

erforderlich. Für die Größe V wird nur das Volumen unter der φ-Fläche benötigt; hierfür wollen wir die Berechnung von φ nach einer Näherungsmethode durchführen, indem wir die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzen. Betrachten wir einen inneren Punkt (m, n) des Querschnittes (Abb. 2) mit den vier Nachbarpunkten

Abb. 2.

$$(m-1, n),\ (m+1, n);\quad (m, n-1),\ (m, n+1),$$

an denen die Funktion φ die Werte

$$\varphi_{m,n},\ \varphi_{m-1,n},\ \varphi_{m+1,n},\ \varphi_{m,n-1},\ \varphi_{m,n+1}$$

haben möge, so bekommen wir einen Näherungswert für den zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ im Punkte (m, n), indem wir die Funktion φ für $y = \mathrm{const} = y_n$ durch eine Parabel $c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ approximieren. Setzen wir

$$x_{m,n} - x_{m-1,n} = x_1 \qquad x_{m+1,n} - x_{m,n} = x_2,$$

so ist nach einer bekannten Interpolationsformel

$$\varphi = \varphi_{m,n} + \frac{\varphi_{m+1,n}\, x_1^2 + \varphi_{m,n}(x_2^2 - x_1^2) - \varphi_{m-1,n}\, x_2^2}{x_1\, x_2 (x_1 + x_2)}\, x + \frac{\varphi_{m+1,n}\, x_1 - \varphi_{m,n}(x_1 + x_2) + \varphi_{m-1,n}\, x_2}{x_1\, x_2 (x_1 + x_2)}\, x^2,$$

die zweite Ableitung nach x im Punkte (m, n) wird also (näherungsweise)

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{2\{\varphi_{m+1,n}\, x_1 - \varphi_{m,n}(x_1 + x_2) + \varphi_{m-1,n}\, x_2\}}{x_1\, x_2 (x_1 + x_2)}.$$

In gleicher Weise ergibt sich für die y-Richtung der Näherungswert

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right|_{m,n} = \frac{2\{\varphi_{m,n+1}\, y_1 - \varphi_{m,n}(y_1+y_2) + \varphi_{m,n-1}\, y_2\}}{y_1\, y_2\,(y_1+y_2)}.$$

Addieren wir die beiden Werte und setzen die Summe gleich null,

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|_{m,n} + \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right|_{m,n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

so erhalten wir eine approximierende Differenzengleichung für die Berechnung von φ. Für die praktische Rechnung ist es bequem, diese Gleichung in der folgenden Form zu schreiben:

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1,n} + \frac{x_1}{x_1+x_2}(\varphi_{m+1,n} - \varphi_{m-1,n}) + \frac{d}{1+k_x},$$

wo

$$k_x = \frac{y_1\, y_2}{x_1\, x_2}$$

und

$$d = \left\{\varphi_{m,n-1} + \frac{y_1}{y_1+y_2}(\varphi_{m,n+1} - \varphi_{m,n-1})\right\} - \left\{\varphi_{m-1,n} + \frac{x_1}{x_1+x_2}(\varphi_{m+1,n} - \varphi_{m-1,n})\right\}$$

gesetzt ist. Wenn die Koordinatendifferenzen zwischen benachbarten Punkten gleich sind $(x_1 = x_2 = y_1 = y_2)$, so vereinfacht sich Gl. (10a) zu

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{4}\{\varphi_{m-1,n} + \varphi_{m+1,n} + \varphi_{m,n+1} + \varphi_{m,n-1}\} \quad \ldots\ldots \quad (10b).$$

Daß die nach Gl. (10) für irgendwelche gegebene Randwerte bestimmten Werte von φ gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergieren, wenn die Intervallbreite gegen null geht, ist von Liebmann gezeigt worden[2]). Eine der Gl. (10a) sehr ähnliche Gleichung erhält man durch Betrachtung des Gleichgewichts zweier elastischer Fäden, die sich rechtwinklig kreuzen, und von denen der in der x-Richtung liegende Faden die Länge $x_1 + x_2$, der in der y-Richtung liegende Faden die Länge $y_1 + y_2$ hat. Am Kreuzungspunkt (m, n) seien beide Fäden miteinander verbunden (Abb. 3). Jeder Faden übt auf den anderen eine Vertikalkraft T aus, d ist die vertikale Entfernung, die die beiden Fäden im Punkte (m, n) haben würden, wenn sie nicht zusammengebunden wären. Für die Erhebung $\varphi_{m,n}$ des Kreuzungspunktes erhält man durch eine Gleichgewichtsbetrachtung eine Gleichung, die der Form nach mit (10a) identisch ist. Nur hat der Faktor k_x den Wert

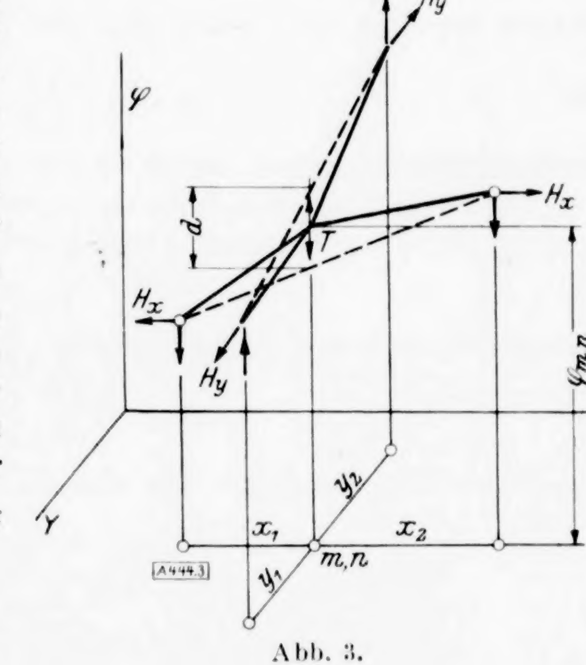


Abb. 3.

$$k_x = \frac{H_x}{H_y}\,\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\,\frac{y_1\, y_2}{x_1\, x_2}$$

statt wie in (10a)

$$k_x = \frac{y_1\, y_2}{x_1\, x_2}.$$

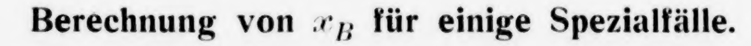
Die beiden Werte werden identisch, wenn

$$\frac{H_x\,(x_1+x_2)}{H_y\,(y_1+y_2)} = 1$$

ist, d. h. wenn die Fadenspannungen H_x und H_y den Längen $x_1 + x_2$ und $y_1 + y_2$ umgekehrt proportional sind.

Die zur Berechnung der φ-Werte erforderliche Arbeit hängt ab von der Zahl der inneren Punkte, der Form des Querschnittes und den Ausgangswerten, die man der unten angegebenen Methode der schrittweisen Annäherung zugrunde legt. Eine kleine Anzahl von Gitterpunkten (oder sich schneidenden Fäden) mit möglichst vielen Intervallen von gleicher Länge in beiden Richtungen erfordert den geringsten Arbeitsaufwand und liefert gute Ausgangswerte für die Berechnung verbesserter Näherungen.

Berechnung von x_B für einige Spezialfälle.



1. Das gleichseitige Dreieck. Ich benutze diesen einfachen Querschnitt, um die Berechnungsmethode für V darzulegen und um die Genauigkeit der Methode zu prüfen,

[2]) „Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildung", Sitzb. Math. Phys. Klasse d. K. B. Akad. d. Wissenschaften, Bd. 47 (1918), S. 285.

da der genaue Wert von x_B, nämlich null, für diesen Fall bekannt ist[3]). Die Gleichungen der Randgeraden des Dreiecks sind

$$x + \frac{h}{3} = 0, \qquad y = \pm\, b\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2h}\right).$$

Abb. 5.

Abb. 4.

Daraus ergeben sich nach (6a) die Randwerte von φ.

Für
$$y = \pm\, b\left\{\frac{1}{3} - \frac{x}{2h}\right\}, \qquad \overline{\varphi} = -\frac{Q\,b^2}{2J}\left\{\frac{x}{9} - \frac{x^2}{6h} + \frac{x^3}{12h^2}\right\} + \overline{\varphi}_0 .$$

Die Integrationskonstante $\overline{\varphi}_0$ kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich null gesetzt werden. Am linken Rande des Querschnittes wird

für
$$x = -\frac{h}{3}, \qquad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}_1 = \frac{2}{729}\,\frac{513\,Q}{b}.$$

Ferner wird in der rechten Ecke

für
$$x = +\frac{2h}{3}, \qquad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}_2 = -\frac{2}{729}\,\frac{216\,Q}{b}$$

die Werte der Integrale für die Gl. (8a) werden.

$$\int \overline{\varphi}\, y\, dx = -\frac{14}{135}\,Q\,h, \qquad \int \overline{\varphi}\, x\, dy = \frac{41}{135}\,Q\,h, \qquad V = \iint \varphi\, dx\, dy = 0.1708\,Q\,h,$$

$$J_{x y^2} = \iint x\, y^2\, dx\, dy = -\frac{h^5}{360}, \qquad J = \iint y^2\, dx\, dy = +\frac{h^4}{48}.$$

Danach wird der Wert von x_B $\qquad x_B = -\,0.0009\,h$.

Da der genaue Wert von x_B null ist, müßte für das Volumenintegral V statt des berechneten Näherungswertes 0.1708 $Q\,h$ der Wert

$$V = \frac{1}{2}\left\{\frac{Q\,J_{x y^2}}{2J} - \int \overline{\varphi}\, y\, dx + \int \overline{\varphi}\, x\, dy\right\} = 0.17035\,Q\,h$$

herauskommen. Der Fehler des Näherungswertes für V ist nicht ganz 0.3 ‰.

Die einzelnen Schritte zur Berechnung von V für das gleichseitige oder gleichschenklige Dreieck sind die folgenden:

Die Gittereinteilung des Querschnittes ist in Abb. 4 dargestellt; jede der Gittergeraden ist die Projektion eines elastischen Fadens. Die Ausgangswerte für φ werden dadurch gewonnen, daß jeweils ein Faden der x- und y-Richtung genommen wird und daraus nach Gl. (10a) erste Näherungen für die Werte $\frac{2}{729}\,\frac{Q}{b}\,\varphi$ gerechnet werden. Dann berechnet man aus diesen Anfangswerten für die inneren Punkte neue, verbesserte φ-Werte. Für das gleichseitige Dreieck, wo $b = 2h/\sqrt{3}$ ist, wird Formel (10a), wenn (siehe Abb. 5) $x_1 = x_2 = h/9$, $y_1 = y_2 = b/18$ genommen wird

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{8}\left\{\varphi_{m-1,n} + \varphi_{m+1,n} + 3\,\varphi_{m,n-1} + 3\,\varphi_{m,n+1}\right\}.$$

[3]) S. Timoshenko: „A Membrane Analogy to Flexure." Proc. London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 20 (1921—22), p. 405.

Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis die dergestalt berechneten φ-Werte sich nicht mehr ändern. Die Endwerte von $\frac{2}{729}\frac{Q}{b}\varphi$ sind in Abb. 5 für das gleichseitige Dreieck angegeben. Das Volumen V erhält man aus den ermittelten Werten durch numerische Quadratur.

2. U-Eisen-Form. Abb. 6 zeigt die Abmessungen eines U-Eisen-Querschnittes aus dem Handbuch der Carnegie Steel Corporation von 1923. Die gegebenen Werte für $\varphi/\varkappa$ am Rande und die ermittelten Werte von $\frac{\varphi_{m,n}}{\varkappa}$ (wo $\varkappa = \frac{Q}{2J}$ ist) sind in Abb. 7 angegeben. Die Ausgangswerte für φ wurden so gewählt, daß die φ-Fläche über dem Steg und den rechteckigen, in der Abb. 7 bezeichneten Eckstücken eine Ebene ist, über den Flanschen eine Regelfläche.

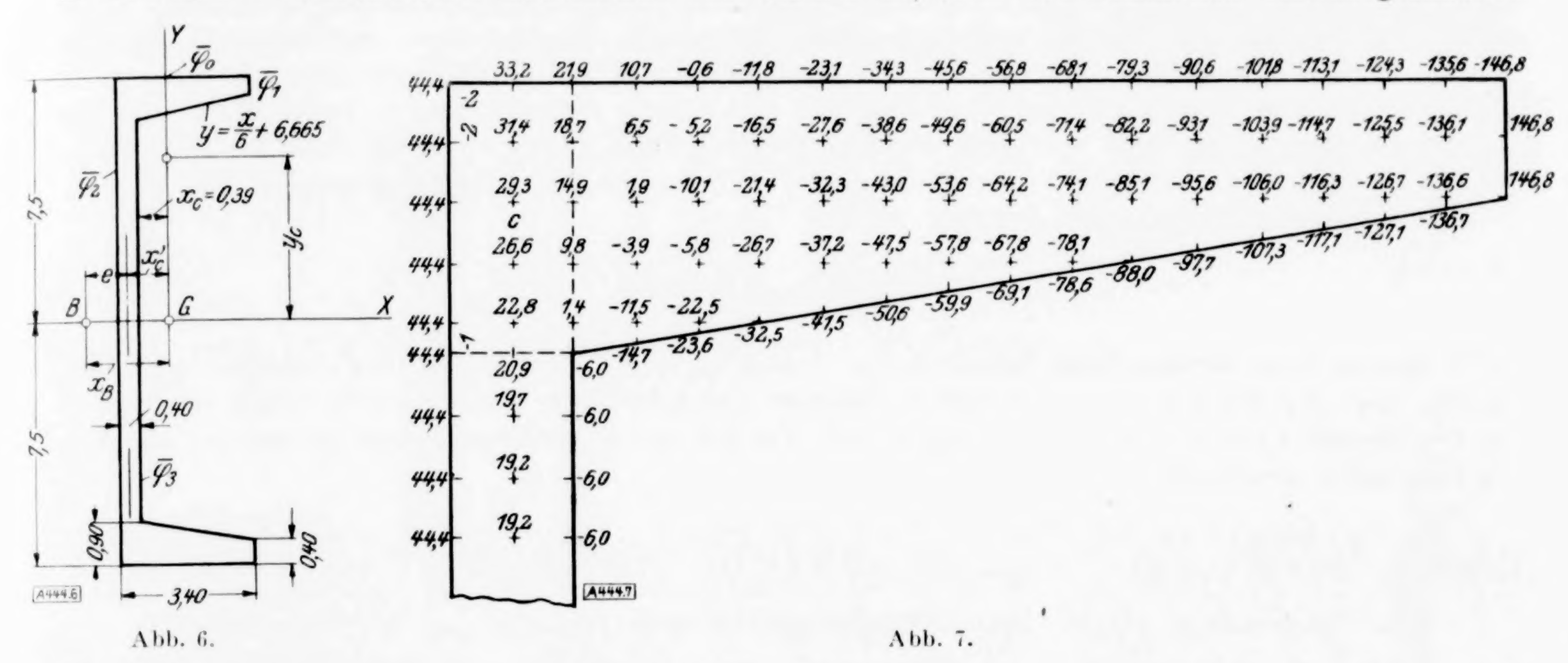


Abb. 6. Abb. 7.

Die Korrektur der Ausgangswerte beschränkte sich wegen der geringen Breite des Steges und der Flanschen im wesentlichen auf die Umgebung der Ecken. Am Rande ergeben sich aus Gl. (6a) unter Berücksichtigung der Stetigkeit von φ in den Ecken die folgenden Werte:

für	$y = \pm 7.5$	$\bar{\varphi} = -56.25\,\varkappa\,x$,
für	$x = \pm\left(\frac{x}{6} + 6.665\right)$	$\bar{\varphi} = -\varkappa\left\{\frac{x^3}{108} + 1.111\,x^2 + 44.422\,x + 23.14\right\}$,
für	$x = +2.61$	$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 = -146.81\,\varkappa$,
für	$x = -0.79$	$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_2 = +44.44\,\varkappa$,
für	$x = -0.39$	$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_3 = -5.98\,\varkappa$.

Die Integrale in (8a) werden:

$$J = 312.6\,; \quad J_{xy^2} = 120.49\,,$$

$$\int \bar{\varphi}\, y\, d\, x = -494.33\,\varkappa\,; \quad \int \bar{\varphi}\, x\, d\, y = +133.04\,\varkappa\,; \quad V = -104.70\,\varkappa\,.$$

Es folgt $x_B = -1.531$. Zur Prüfung dieses Wertes habe ich das Ergebnis mit den nach anderen Methoden und durch Versuch gefundenen Werten verglichen. Die folgende Zusammenstellung zeigt den Vergleich.

Bezeichnet man mit h die Steghöhe, mit b die Flanschbreite, mit a_w die Steg-Querschnittsfläche, mit a_f die Flansch-Querschnittsfläche, ferner — bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen y-Achse durch die Stegmittellinie läuft — mit x_c' den Abstand des Schwerpunktes von der Stegmittellinie und mit x_c', y_c die Schwerpunktskoordinaten des halben Querschnitts, mit J'_{xy} das Zentrifugalmoment des halben Querschnitts, schließlich mit J wie früher das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnitts in bezug auf die Symmetrieachse (x-Achse), so bekommt man Näherungswerte für den Abstand e (siehe Abb. 6) des Schubmittelpunktes von der Stegmittellinie aus den folgenden Formeln

1. $e = \frac{b/2}{1 + a_w/6\,a_f}$ 2. $e = \frac{h}{2}\frac{x_c'}{y_c}$ (siehe hierzu: Bulletin 211 Engineering Exp. Sta. University of Illinois)

3. $e = \frac{h\,J'_{\varkappa y}}{J}$ (siehe A. Eggenschwyler, Schweizer Bauzeitung, Bd. 83 (1924) S. 259).

Nach diesen Formeln erhält man für x_B die Werte 1. $x_B = 1.59$, 2. $x_B = 1.40$, 3. $x_B = 1.55$. Nach der oben angegebenen Methode ergab sich $x_B = 1.54$, das Experiment lieferte den Wert 1.29.

Beiträge zur Nomographie. III[1]).

Von *Alexander Fischer* in Prag.

Im folgenden sollen einige weitere Bemerkungen und Ergänzungen zu meistens in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeiten gemacht werden, und zwar hauptsächlich zu meiner Abhandlung: „Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln“ [2]).

1. Graphische Rechentafeln für die Berechnung der ideellen Schiffslänge. In seinem Aufsatz „Vierskalige Nomogramme“ gibt C. v. Dobbeler[3]) eine Tafel für die Berechnung der ideellen Schiffslänge, bei der ein Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät in Anwendung tritt. Dieselbe dient als Beispiel für die von ihm näher dargelegte allgemeine — explizite[4]) — Theorie solcher „Vierskaliger Nomogramme“. Wie aus der Tafel ersichtlich, ist aber dieselbe vom nomographischen Standpunkt aus insofern als nicht ganz vollkommen zu bezeichnen, als bei ihr eine Leiter nicht ohne weiteres benutzt werden kann, sondern noch eine kleine Nebenrechnung (und zwar Bildung eines Quotienten) erforderlich ist. Der eigenartige Bau der zugrunde liegenden Funktionsbeziehung

$$l_i = l\,\frac{\varphi + 1{,}7\,t/b}{1 + 2\,t/b} \quad \ldots \ldots \quad \text{(A)}$$

(l_i, l: ideelle bzw. tatsächliche Schiffslänge, t und b: Tiefe und Breite des Schiffes, φ: Koeffizient, der von der Bauart des Schiffes abhängt und zwischen 0,45 und 0,85 liegt) ermöglicht es, für dieselbe auf Grund meiner impliziten Theorie noch weitere Tafeln zu entwerfen, was im folgenden geschehen soll.

α) Vertafelung als Sonderfall der von C. v. Dobbeler explizite hergeleiteten Schlüsselgleichung (5) für das Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät.

Setzt man in der allgemeinen Schlüsselgleichung (5)

$$\frac{f_1(x) - f_2(y)}{F_1(x) - F_2(y)} = \frac{F_3(z) - F_4(v)}{-f_3(z) + f_4(v)}$$

die Funktionen $f_2(y) = 0$, $F_1(x) = 0$, $f_4(v) = 0$, so ergibt sich folgende Gleichungsdreiheit:

Gleichung des Ablese- (Einstell-) fadens:

$$y = \frac{-f_1(x)}{F_2(y)}\,x + F_4(x) \quad \ldots \ldots \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\left.\begin{array}{l} y = F_3(z) \\ x = -f_3(z) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \text{(II), (III)}.$$

Diese Zuordnungsbeziehung, in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem gedeutet, ergibt die Abb. 10 von C. v. Dobbeler. Es werde aber auf diesen, bloß der Vollständigkeit halber gebrachten Sonderfall nicht weiter eingegangen[5]).

β) Vertafelung als Sonderfall der Funktionsbeziehung $f_1(x_1)\,f_2(x_2) = f_{34}(x_3, x_4)$ und Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät.

Während sich im vorstehenden die trinomische Form der spezialisierten „Grundgleichung“ [6]) als wesentlich für die Vertafelung erwies, hat die im folgenden zu behandelnde Vertafelungsart — abgesehen von ihrer grundsätzlichen Einfachheit — überdies den großen Vorteil, daß die Form der rechten Seite der vorgelegten Funktionsbeziehung vollkommen belanglos ist, so daß diese Vertafelungsart sehr allgemeiner Natur ist. Ihre Grundlage ist folgende:

Die Gleichung einer durch den Ursprung eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems gehenden Geraden mit der Richtungstangente a/b lautet bekanntlich

$$y = (a/b)\,x \quad \ldots \ldots \quad \text{(a)}.$$

[1]) Vgl. hierzu „Beitrag I“, diese Z., Bd. 4 (1924), H. 4; „Beitrag II“, diese Z., Bd. 14 (1934), H. 2, zitiert als „I“ bzw. „II“.

[2]) Diese Z., Bd. 7 (1927), H. 3, H. 5; Bd. 8 (1928), H. 4; Bd. 9 (1929), H. 5, deren einzelne Mitteilungen als „Mitt. I“ usw. zitiert werden sollen.

[3]) Diese Z., Bd. 7 (1927), H. 6.

[4]) Vgl. hierzu „Mitt. IV“.

[5]) Vgl. hierzu die in „Mitt. III“ behandelten „Anwendungen“.

[6]) Vgl. hierzu „Mitt. IV“.

Faßt man y und x als Funktionen zweier Veränderlichen x_1 und x_2 auf, also $y = y(x_1, x_2)$ und $x = x(x_1, x_2)$, und deutet alles auf die aus Abb. 1 ersichtliche Weise, so erhält man eine Tafel mit Doppelkotenpunkten und Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät, bei der der eine Faden („Ablesefaden" oder „Einstellfaden") durch den Ursprung des Koordinatensystems, der andere („Einstell-" bzw. „Ablesefaden") durch die Funktionsleitern auf den Koordinatenachsen hindurchgeht. Hierbei möge erwähnt werden, daß durch Einführung eines frei wählbaren Exponenten m statt Gl. (a) auch angesetzt werden kann

$$y^m = \frac{a}{b}\, x^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(b)},$$

wodurch die Tafelform günstig beeinflußt werden kann. Es treten dann an Stelle der regelmäßigen Leitern für a und b solche der m-ten Wurzeln. Hiervon soll aber im folgenden kein Gebrauch gemacht werden.

Dies auf die vorgelegte Funktionsbeziehung (A) angewandt, ergibt:

Gleichung des Ablesefadens:

$$\frac{l_i}{l} = \frac{y}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\frac{y}{x} = \frac{\varphi + 1{,}7\,(t/b)}{1 + 2\,t/b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II)},$$

$$x = 1 + 2\,t/b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}.$$

Hierbei wurde für die frei wählbare Gl. (III) die angeschriebene einfachste Wahl getroffen, daß die „Bezifferung" die Schar achsenparalleler Geraden ist (s. u. Punkt γ). In Abb. 2, die die so erhaltene Tafel darstellt, ist, wie in den folgenden, das von C. v. Dobbeler gewählte Beispiel eingetragen.

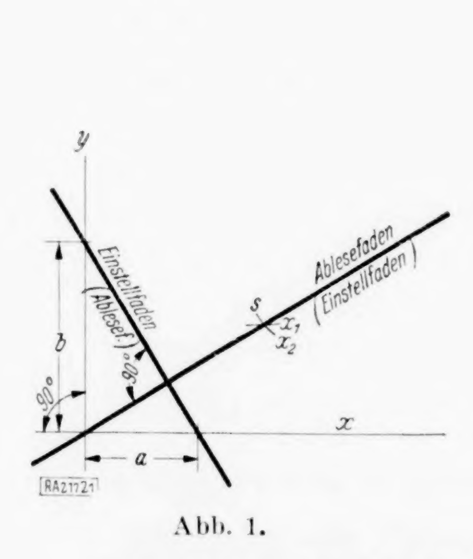


Abb. 1.

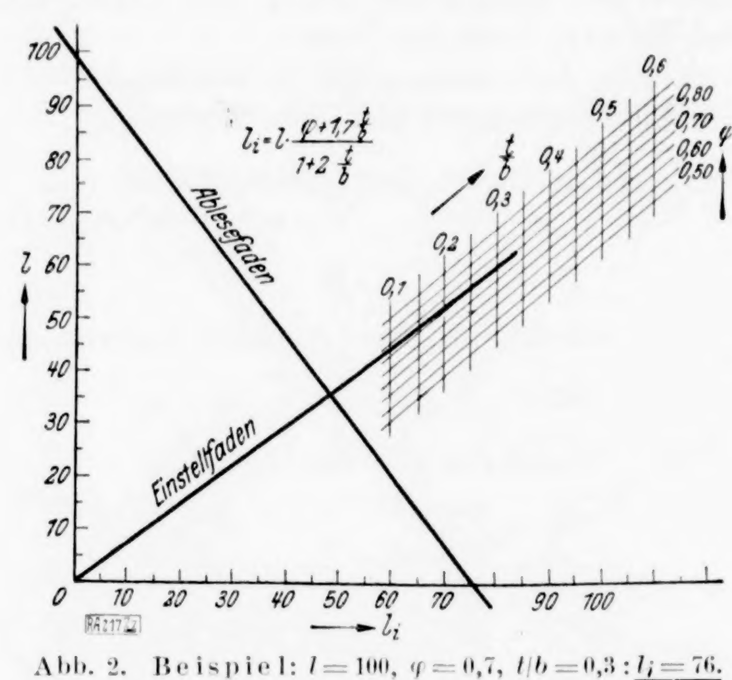


Abb. 2. Beispiel: $l = 100$, $\varphi = 0{,}7$, $t/b = 0{,}3$: $l_i = 76$.

Auch dieser Fall läßt sich als Sonderfall der verallgemeinerten Schlüsselgleichung (5) gemäß Punkt 5 (Einführung weiterer Veränderlichen) der Arbeit von C. v. Dobbeler auffassen. Schreibt man nämlich die in leichtverständlicher Weise zunächst verallgemeinerte und sodann spezialisierte Gl. (5) in folgender Form

$$\frac{f_1(x_1)}{F_2(x_2)} = \frac{F_{34}(x_3, x_4)}{f_{34}(x_3, x_4)},$$

so erhält man die eben implizite hergeleitete Lösungsart auch auf explizitem Wege.

Wie leicht einzusehen, läßt sich die Tafel zu einem mechanischen Zeigerinstrument derart umgestalten, daß der eine Faden um den Koordinatenursprung drehbar ist, während der andere längs desselben in der Tafelebene parallel zu sich verschieblich ist.

γ) Vertafelung als Sonderfall der Funktionsbeziehung $f_{12}(x_1, x_2) = f_{34}(x_3, x_4)$. (Allgemeine Strahlentafeln mit Ablesestrahl als Hilfssystem[7].)

[7]) Vgl. für diesen Punkt insbesondere H. Schwerdt: Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage, Berlin 1924, S. 107. — Siehe auch C. v. Dobbeler: a. a. O., S. 490.

Es sind folgende zwei Schritte näher zu erörtern:

a) Herleitung der allgemeinen Strahlentafel für die Beziehung

$$f_3(x_3) = f_{12}(x_1, x_2) \quad \ldots \quad (\alpha),$$

und b) Darstellung der Funktionsbeziehung

$$f_{12}(x_1, x_2) = f_{34}(x_3, x_4) \quad \ldots \quad (\beta)$$

durch Koppelung zweier allgemeiner Strahlentafeln nach a).

a) Wie früher, ist in der Gleichung der Geraden durch den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems

$$\frac{y}{x} = a$$

y und x als Funktion zweier Veränderlichen, also $y = y(x_1, x_2)$ und $x = x(x_1, x_2)$ aufzufassen. Dies heißt, daß die Gerade durch den Schnittpunkt einer Kurve aus der x_1-Schar mit einer solchen aus der x_2-Schar hindurchgeht. Durch diesen Ansatz gelingt es, Funktionsbeziehungen von der Form (α) in der Form von allgemeinen Strahlentafeln bzw. mechanischen Zeigerinstrumenten darzustellen. (Die gewöhnlichen Strahlentafeln sind Sonderfälle dieser allgemeinen Tafeln, indem y und x Funktionen bloß je eines Parameters, $y = y(\beta)$ und $x = x(a)$, sind.

b) Wie üblich, ist die Funktionsbeziehung (β) durch Einführung einer Hilfsveränderlichen ζ in die beiden Teilsysteme

$$\zeta = f_{12}(x_1, x_2) \quad \ldots \quad (t_1),$$

$$\zeta = f_{34}(x_3, x_4) \quad \ldots \quad (t_2)$$

zu zerfällen. Verwendet man nun, gemäß a), das Strahlenbüschel als Hilfssystem und überlagert die beiden Teiltafeln t_1 und t_2, so hat man die oft erwünschte Darstellung der Funktionsbeziehung durch ein mechanisches Zeigerinstrument Für die Vertafelung der einzelnen Teilsysteme ist wieder der allgemeine Ansatz (Ablesestrahl, Lösende Kurve und deren Bezifferung) heranzuziehen[8]. —

Die Anwendung des Vorstehenden auf die vorgelegte Funktionsbeziehung (A) ergibt die beiden Teilsysteme und ihre Zerfällung:

a) Gleichung des Ablesestrahls:

$$\frac{y}{x} = \zeta \quad \ldots \quad (\mathrm{I}),$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$y = t_i \quad \ldots \quad (\mathrm{II}),$$

Gleichung der Bezifferung:

$$y = t \quad \ldots \quad (\mathrm{III}),$$

b) Gleichung des Ablesestrahls:

$$\frac{y}{x} = \zeta \quad \ldots \quad (\mathrm{I}),$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\frac{y}{x} = \frac{\varphi + 1{,}7\,(t/b)}{1 + 2\,t/b} \quad \ldots \quad (\mathrm{II}),$$

$$x = 1 + 2\,(t/b \quad \ldots \quad (\mathrm{III}).$$

Hierin wurde, wie unter β, für die freiwählbare Gl. (III) die einfachste Wahl getroffen. Dies dürfte für die Herstellung von derartigen Tafeln wohl am zweckmäßigsten sein. Es möge aber noch auf folgende, für die Herstellung von Zeigerinstrumenten nützliche Möglichkeit kurz hingewiesen werden. Schreibt man vor:

$$\text{In Teilsystem a)} \quad x^2 + y^2 = \psi_1(x_1),$$

$$\text{in Teilsystem b)} \quad x^2 + y^2 = \psi_3(x_3),$$

[8]) Wie betont werde, betrachtet bereits H. Schwerdt a. a. O. die grundsätzliche Möglichkeit, als Hilfssystem das Strahlenbüschel zu verwenden. Aber die tatsächliche Durchführung gelingt auf einfache Weise erst durch den obigen Ansatz.

worin die ψ entsprechend zu wählende Funktionen von x_1 bzw. x_3 sind, so können auf dem Ablesestrahl die Leitern für x_1 und x_3 aufgetragen werden; das „Grundblatt" enthält dann bloß zwei Kurvenscharen, bzw. bei dem unter β erwähnten Instrument bloß eine solche (s. Abb. 3). Man gelangt dann auf diesem Wege zu verallgemeinerten „Polarnomogrammen"[9]).

Die gemäß dem Vorstehenden entworfene Tafel zeigt Abb. 4. Hierbei ist vielleicht erwähnenswert, daß die beiden Teiltafeln infolge der Besonderheit des vorliegendes Falles nebeneinander gelagert werden konnten, was für die Ablesung günstig ist.

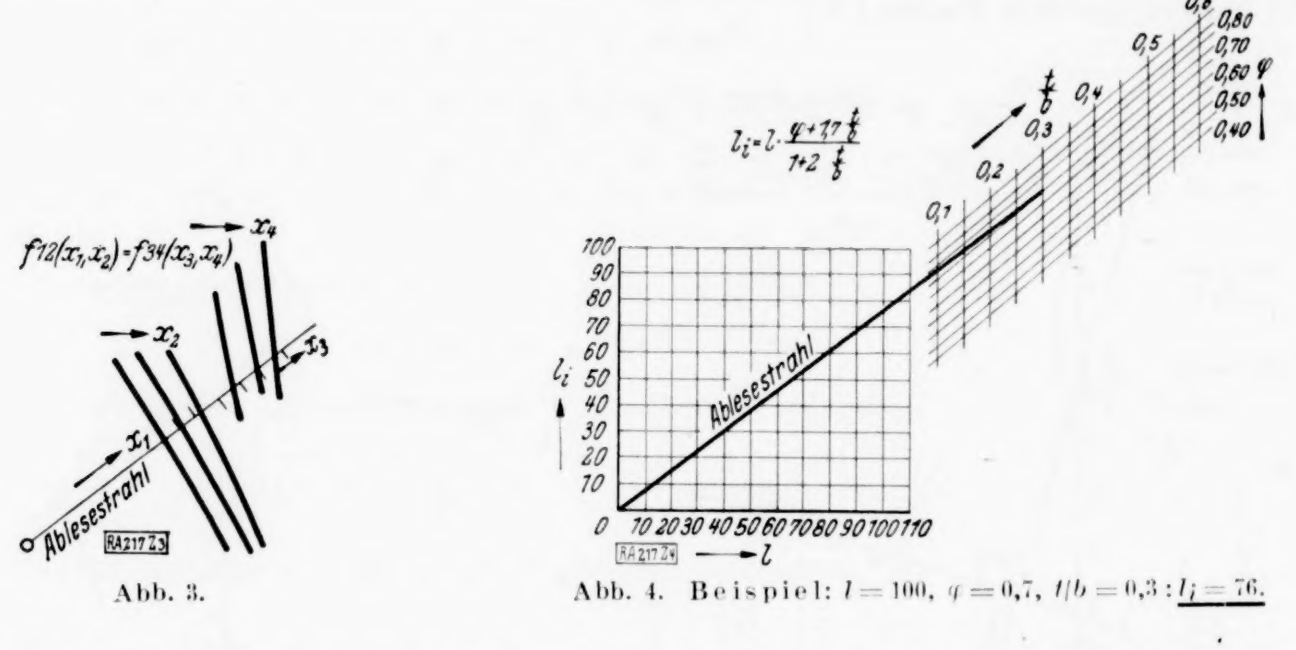


Abb. 3.

Abb. 4. Beispiel: $l = 100$, $\varphi = 0{,}7$, $t/b = 0{,}3$: $\underline{l_i = 76}$.

δ) Tafel mit Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät und Zapfenlinie.

Wie leicht einzusehen, entfalten die unter β und γ gegebenen Vertafelungsverfahren ihren vollen Wert erst bei komplizierteren Formen von Funktionsbeziehungen. Auch ist bei den entworfenen Tafeln der eingangs erwähnte, der Tafel von C. v. Dobbeler anhaftende grundsätzliche Nachteil ebenfalls vorhanden. Die im folgenden hergeleitete Tafel besitzt denselben nicht mehr. Dies gelingt dadurch, daß neben der Anwendung des allgemeinen Grundgedankens meines Verfahrens die besondere Eigenart der vorgelegten Funktionsbeziehung (A) berücksichtigt wird.

Es ist zunächst folgende Umformung von (A) vorzunehmen:

$$\frac{l_i}{l} = 0{,}85\,\zeta = 0{,}85\,\frac{\dfrac{\varphi}{1{,}7} + \dfrac{t}{b}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{b}},$$

$$\eta = \frac{1}{\zeta - 1} = \frac{t}{b}\,\frac{1}{\dfrac{\varphi}{1{,}7} - \dfrac{1}{2}} + 0{,}5\,\frac{1}{\dfrac{\varphi}{1{,}7} - \dfrac{1}{2}}.$$

Abb. 5.

Es ergibt sich hierauf folgende Gleichungsdreiheit:

Gleichung des Ablesefadens:

$$y = \frac{t}{b}\,x - \eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0{,}5\,\frac{1}{\dfrac{\varphi}{1{,}7} - \dfrac{1}{2}} \\ x &= -\frac{1}{\dfrac{\varphi}{1{,}7} - \dfrac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II), (III)},$$

die in einem rechtwinkligen kartesischen System zu deuten ist (s. Abb. 5). Hierin ist aber η eine Funktion von l_i/l, so daß diese Größe nur den Charakter einer Hilfsgröße hat, in welchem Falle die Ordinatenachse als „Zapfenlinie" zu bezeichnen ist. Aus η erhält man

[9]) Vgl. M. d'Ocagne: Traité de Nomographie, 2e éd., Paris 1921, p. 115 und p. 400.

aber durch folgende elementargeometrische Betrachtung das gesuchte l_i: Trägt man die Größe 1 von 0 nach unten ab ($00_1 = 1$), so gilt die Proportion:

$$P0 : P0_1 = \eta : (\eta - 1) = 1 : \zeta = 0{,}85\, l : l_i$$ („Schritt II" in Abb. 6).

Die Konstruktion der Tafel ist sehr einfach; ihr einziger Nachteil ist der, daß der Punkt $\varphi = 0{,}85$ auf der Lösenden Kurve ins Unendliche geht. — Die Benutzung der Tafel erfolgt in zwei, in Abb. 6 genau dargelegten Schritten: Zunächst Einstellung des Rechtwinkelkreuzes mit Hilfe der gegebenen Größen t, b und φ. Hierauf Bestimmung von l_i aus l durch Drehung des Ablesefadens um den Punkt ζ[10]).

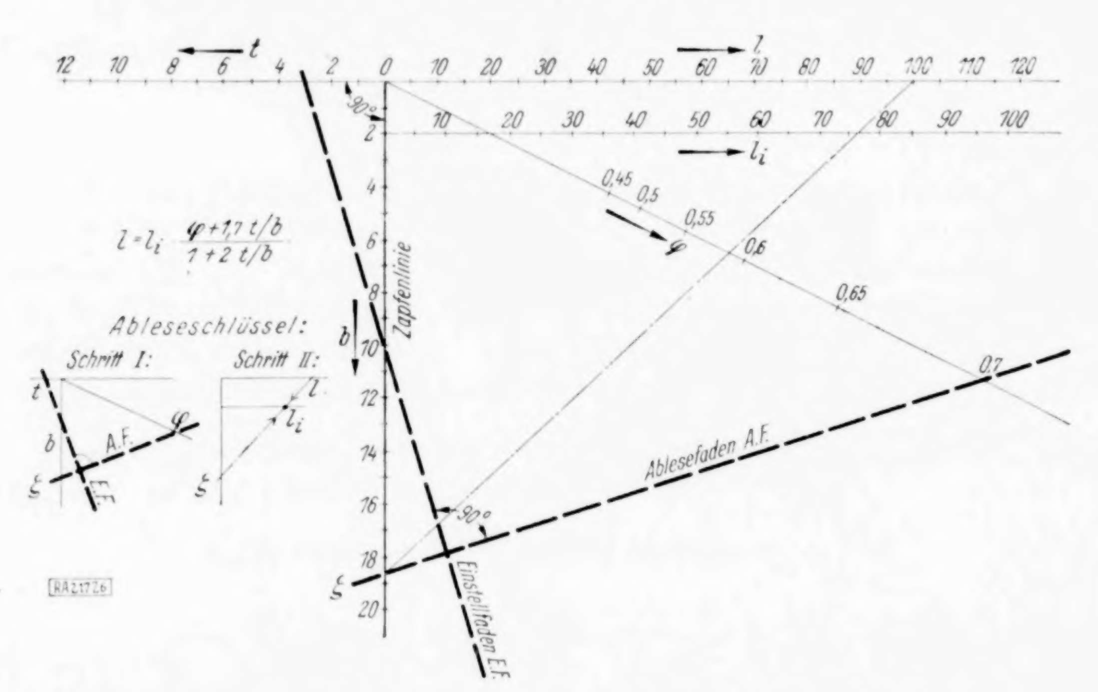


Abb. 6. Beispiel: $l = 100$, $\varphi = 0{,}7$, $t = 3$, $b = 10$, $(t/b = 0{,}3)$: $\underline{l_i = 76}$.

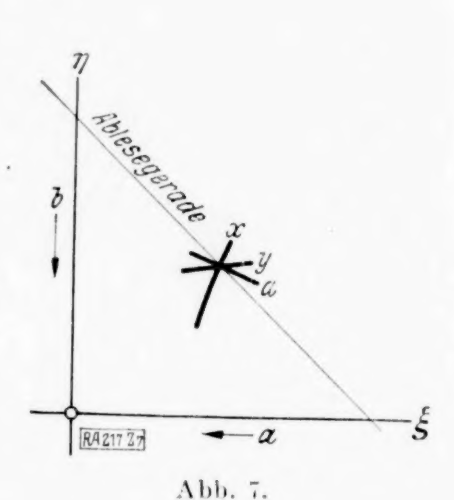


Abb. 7.

2. Einiges zur Nomographie im komplexen Gebiet[11]). 1. Graphische Rechentafeln für die vollständige Auflösung trinomischer algebraischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Soviel ersichtlich, betreffen die in der neueren Literatur gegebenen Vertafelungen bloß die quadratische Gleichung, und zwar gibt es hierfür sowohl eine Netztafel[12]) als auch eine Fluchtlinientafel[13]). In beiden Fällen ist das Vertafelungsverfahren unmittelbar nur auf die quadratische Gleichung zugeschnitten, im letzteren Fall handelt es sich um eine Vertafelung des unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Ausdrucks. Es wird also eine explizite Auflösungsformel vorausgesetzt, daher eine Anleihe bei der Algebra gemacht, was vom grundsätzlichen Gesichtspunkt aus nicht gutgeheißen werden kann, da ja die Nomographie gerade die Algebra ersetzen soll. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich durch eine Anpassung des von C. F. Gauß zu seinem ersten Beweis des „Fundamentalsatzes der Algebra" verwendeten Gedankens — der von F. Klein in den genannten Vorlesungen etwas abgeändert gegeben wird — an den vorliegenden Zweck, auf Grund des Leitgedankens meines Verfahrens vollständige Lösungen der trinomischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten erhalten lassen, ohne daß man das Gebiet der Algebra betritt. Hierbei ist aber zu bemerken, daß man mit den von M. d'Ocagne zuerst als neues Prinzip eingeführten „Zweikotenpunkten", deren Nützlichkeit ja gerade im vorhergehenden Punkt neuerdings dargetan wurde, nicht mehr das Auslangen findet, es sind auf dem „Grundblatt" der Tafel „Dreikotenpunkte" verzeichnet, so daß der die Lösung bestimmende Punkt ein Schnittpunkt von vier Kurven (drei + Ablesekurve) ist (s. Abb. 7). Aus diesem Grunde erweist sich für Gleichungen mit vier Gliedern das von M. d'Ocagne verwendete Verfahren nicht mehr als unmittelbar verwendbar, es erhält dann die jüngst von Vl. Vranič veröffentlichte Zurückführung solcher Gleichungen auf trinomische (was bekanntlich von M. d'Ocagne erst bei Gleichungen mit fünf Gliedern auf solche mit vieren geschieht), erhöhte Bedeutung (siehe u.).

[10]) Weitere Anwendungen dieser Vertafelungsart in meinen Aufsätzen: 1. Rechenbild (Nomogramm) zur Berechnung des Profilradius von gleichschenkligen Trapezquerschnitten „Wasserkraft u. Wasserwirtschaft" 25 (1930), H. 23, S. 302. — 2. Graph. Rechentafel (Nomogramm) für die Berechnung der Wassergeschwindigkeit in Kanälen und Flüssen (nach der Formel von Ganguillet-Kutter). „Die Wasserwirtschaft" 23 (1930), H. 36, S. 740.

[11]) Vgl. für diesen Punkt insbesondere F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Bd. I, 3. Aufl., S. 109 ff., Berlin 1924.

[12]) H. v. Sanden, Praktische Analysis. 2. Aufl. S. 9 (Handb. d. angewandten Mathematik, Bd. I), Leipzig-Berlin 1923.

[13]) Th. Spitta, Ein Nomogramm, welches auch imaginäre Wurzeln der quadratischen Gleichung zu bestimmen gestattet. Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterr. 61 (1930), S. 255. O. Heck u. A. Walther, Nomogramm für die komplexen Wurzeln charakteristischer (insbesondere quadratischer und kubischer) Gleichungen von Schwingungsproblemen. Ingenieur-Archiv 1 (1930), H. 5, S. 611.

Wie bekannt, ist der genannte Beweis eigentlich funktionentheoretischer Natur und werden für das folgende bloß die beiden Aussagen aus der Funktionentheorie genügen:

1. Jede analytische Funktion $f(x+iy)$ ist in der Form

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad (i=\sqrt{-1})$$

darstellbar. Im vorliegenden Fall ist (mit $z = x+iy$)

$$f(z) \equiv z^n + a\,z^m + b \cdot (a, b: \text{reell}).$$

2. Ist $f(z) \equiv 0$, so ist $u(x,y) = 0$, $v(x,y) \equiv 0$.

a) Quadratische Gleichung: $z^2 + a\,z + b = 0$, $(a, b: \text{reell})$.

Da hier die Rechnung noch leicht zu übersehen ist, werde die Form $z = x + i\,y$ verwendet und die Tafel im gewöhnlichen kartesischen Koordinatensystem ξ, η hergeleitet. Es ergibt sich als

Gleichung der Ablesegeraden:

$$a\,\xi + b\,\eta + 1 = 0 \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\xi = \frac{x}{x^2 - y^2}, \qquad \eta = \frac{1}{x^2 - y^2} \quad \text{(II, III)}.$$

Hierzu tritt für $y \neq 0$ die „Komplexitätsbedingung":

$$\xi = -\frac{a}{2} \quad \text{(IV)}$$

Nach leichten Umrechnungen ergeben sich für die „Lösende Kurve" gleichseitige Hyperbeln

$$\xi^2 - (\eta\,y)^2 = \eta,$$

die für $y = 0$ in die Parabel $\xi^2 = \eta$ übergehen. Wie ersichtlich, erhält die Tafel im komplexen Fall ein sog. „überzähliges System" für a.

In Abb. 8 sind zwei Beispiele eingezeichnet, die zeigen, daß die Tafel ganz allgemein verwendbar ist. Daß die eingangs genannte Fluchtlinientafel von Th. Spitta, bzw. die mit ihr grundsätzlich völlig identischen von O. Heck und A. Walther einfacher sind, spielt wohl gegenüber der prinzipiellen Wichtigkeit der so erhaltenen Tafel keine Rolle.

Wie ersichtlich, ist im komplexen Falle (Beispiel 1) die Ablesegerade Tangente an die Lösende Kurve in deren Schnittpunkt mit der Einzelkurve (im vorliegenden Fall: Geraden) aus der Bezifferung. Dies läßt sich im vorliegenden Fall einfach verifizieren:

Die Gleichung der erwähnten Tangente lautet — differentialgeometrisch hergeleitet —

$$\eta = -\frac{a}{\frac{a^2}{4} + y^2}\,\xi + c.$$

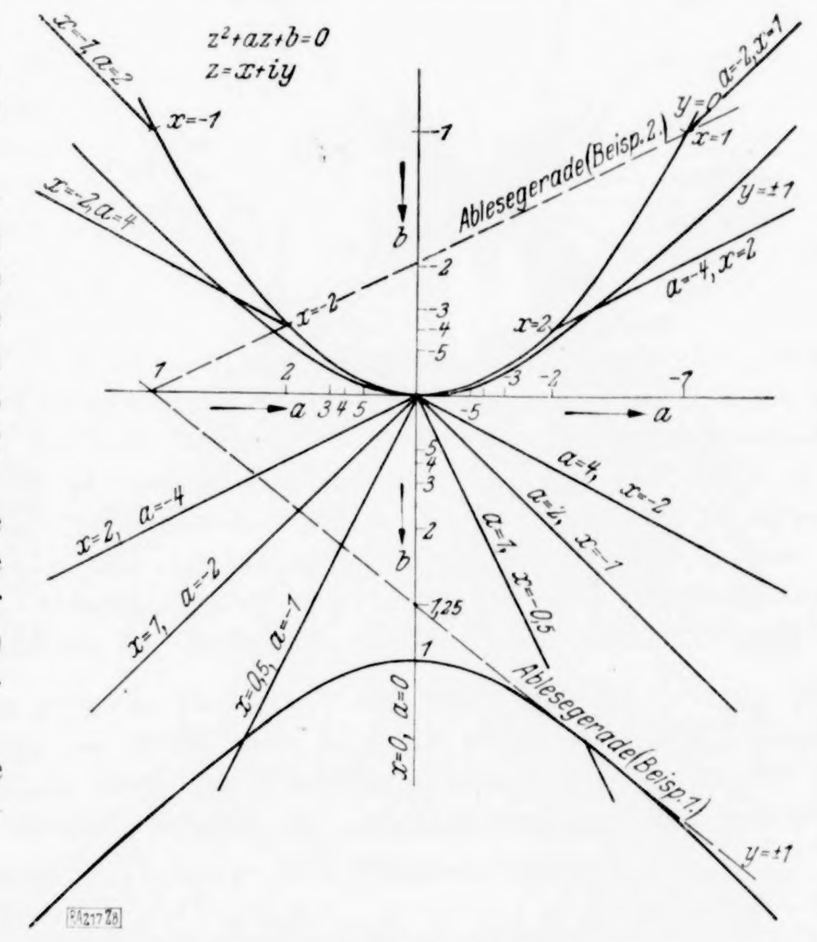


Abb. 8. 1. Beispiel: $z^2 + z + 1{,}25 = 0$. $z_1 = -0{,}5 + i$, $z_2 = -0{,}5 - i$.
2. Beispiel: $z^2 + z - 2 = 0$. $z_1 = 1$, $z_2 = -2$.

Soll dies mit der Gleichung der Ablesegeraden (I)

$$\eta = -\frac{a}{b}\,\xi - \frac{1}{b} \quad \text{(I)}$$

übereinstimmen, so muß sein

$$b = \frac{a^2}{4} + y^2 \qquad \text{oder} \qquad y = \pm\sqrt{b - \frac{a^2}{4}},$$

was mit $z = x + i\,y$ aus der bekannten Auflösungsformel folgt.

β) Allgemeine trinomische Gleichung: $z^n + a z^m + b = 0$ (a, b: reell). Hier ist es zweckmäßig, Polarkoordinaten zu benutzen: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Es ergibt sich dann nach leichten Umrechnungen wieder zunächst im kartesischen Koordinatensystem ξ, η als

Gleichung der Ablesegeraden:

$$a\xi + b\eta + 1 = 0 \qquad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\xi = r^{n-m}\frac{\cos m\varphi}{\cos n\varphi} \qquad \eta = r^{-n}\frac{1}{\cos n\varphi} \qquad \text{(II, III)},$$

Komplexitätsbedingung:

$$r^{n-m}\frac{\sin n\varphi}{\sin m\varphi} = -a \qquad \text{(IV)}.$$

Wie ersichtlich, ist die Konstruktion der den Gl. (II) bis (IV) entsprechenden Kurvenscharen grundsätzlich punktweise ohne jede weitere Rechnung bloß mit Hilfe trigonometrischer Tafeln möglich, wenn es auch zweckmäßig sein wird, sich über die einzelnen Parameterkurven durch Aufstellung von deren expliziten Gleichungen einen Überblick zu verschaffen.

In Abb. 9 ist eine Tafel für die reduzierte Gleichung dritten Grades dargestellt und daselbst wieder zwei Beispiele eingezeichnet. Auch hier tritt unter gewissen Umständen der unter a erwähnte Fall ein, daß die Ablesegerade die Lösende Kurve in deren Schnittpunkt mit der Bezifferung berührt; es ist mir aber nicht gelungen, hierüber Klarheit zu erhalten.

Wie zu vermuten, dürfte die Übertragung der oben behandelten Tafeln in andere Koordinatensysteme usw. keine neuen Schwierigkeiten mehr bereiten. [Es wären dann zunächst andere Funktionsbeziehungen von der gleichen „kanonischen Form (IV_0)" (z. B. Keplersche Gleichung) zu behandeln, ebenso dann die anderen kanonischen Formen. Hierbei ist aber zu betonen, daß die Einteilung in kanonische Formen hier wohl — noch mehr als im reellen Gebiet — nur als äußerliches Einteilungsprinzip anzusehen ist, da der innere Aufbau der Glieder mit der komplexen Veränderlichen für die Zerfällung der Funktionsbeziehung, wie aus dem Vorstehenden deutlich ersichtlich ist, von ganz ausschlaggebender Bedeutung ist.

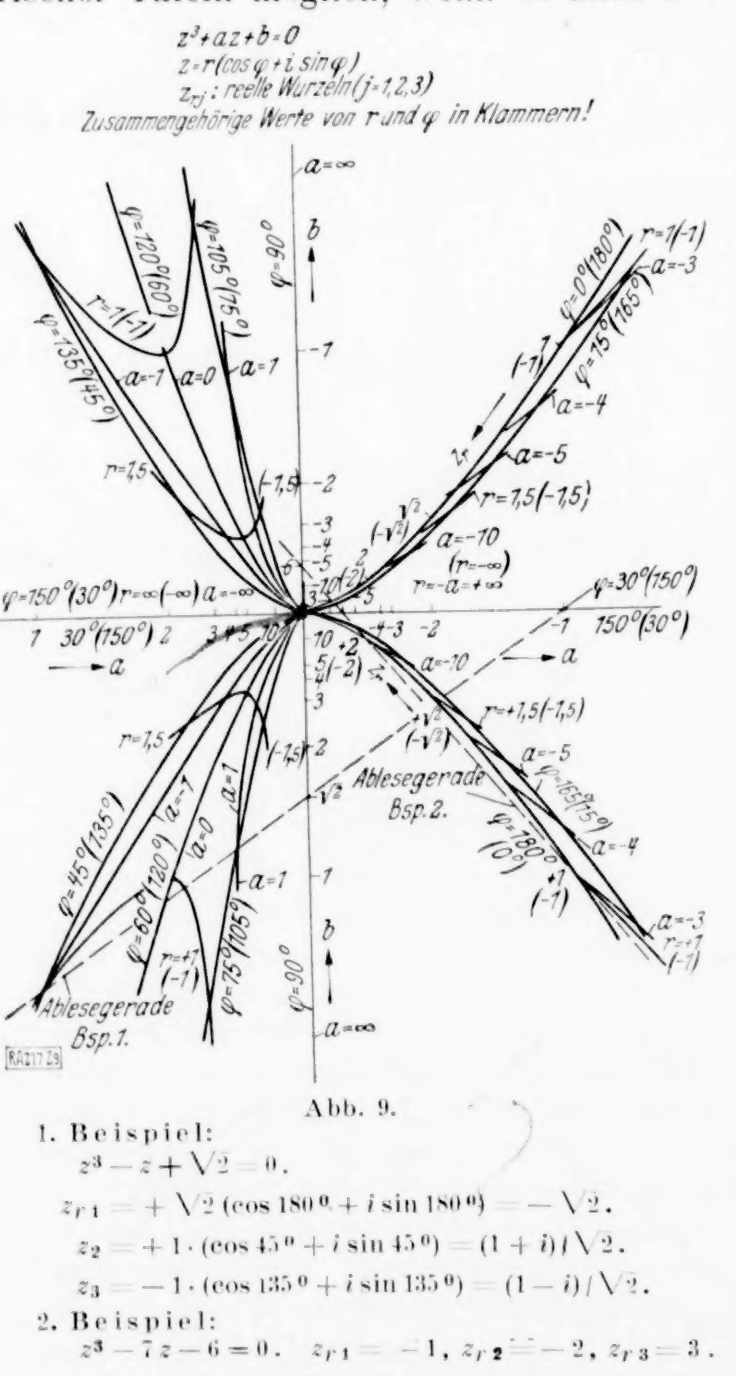


Abb. 9.

1. Beispiel:

$z^3 - z + \sqrt{2} = 0.$

$z_{r1} = +\sqrt{2}(\cos 180^0 + i\sin 180^0) = -\sqrt{2}.$

$z_2 = +1\cdot(\cos 45^0 + i\sin 45^0) = (1+i)/\sqrt{2}.$

$z_3 = -1\cdot(\cos 135^0 + i\sin 135^0) = (1-i)/\sqrt{2}.$

2. Beispiel:

$z^3 - 7z - 6 = 0. \quad z_{r1} = -1, \; z_{r2} = -2, \; z_{r3} = 3.$

2. Graphische Rechentafeln für die vollständige Auflösung trinomischer algebraischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten.

1. Während die im vorstehenden behandelten Tafeln eine naturgemäße Verallgemeinerung der Fluchtlinientafeln (für das reelle Gebiet) bilden, die sie als Grenzfall in sich begreifen, bietet die Übertragung auf Gleichungen mit komplexen Koeffizienten auf dem bisher beschrittenen Weg große Schwierigkeiten, die, da sie in dem Kern der Sache gelegen sind, anscheinend unüberwindlich sind. Glücklicherweise ist aber in den sonderbarerweise nicht in die Lehrbuchliteratur übergegangenen Arbeiten von R. Mehmke[14]) bereits seit vielen Jahren ein Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe enthalten, der, alles unwesentlichen Beiwerks entkleidet, ohne weiteres verallgemeinert werden kann und zu neuen Ergebnissen führt. Es

[14]) Es kommen vor allem in Betracht: R. Mehmke: Graph. Tafeln z. mechan. Bestimmung sämtlicher Wurzeln von trinomischen Gleichungen mit (reellen oder) komplexen Koeffizienten in W. Dyck, Katalog mathemat. u. math.-phys. Modelle, Apparate u. Instrumente. Nachtrag, München 1893, S. 16. — R. Mehmke: Numerisches Rechnen, Enzykl. d. math. Wissenschaften, Bd. I F, S. 1022. — R. Mehmke: Beiträge z. graph. Rechnen mit komplexen Zahlen. Festschrift der Techn. Hochschule Stuttgart, Berlin 1929, S. 236.

handelt sich hierbei um Zurückführung der trinomischen Gleichungsform, die nunmehr 4 Parameter enthält, auf eine binomische mit 2 Parametern. Der Gedankengang von R. Mehmke besteht in zwei Schritten: 1. Zurückführung auf die einfachere Form. 2. Vertafelung der letzteren.

1. Die allgemeine trinomische Gleichung lautet:

$$a\, e^{i\alpha} z^n + b\, e^{i\beta} z^m + c\, e^{i\gamma} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

worin $a, b\ c$ positive reelle Größen sind; die Unbekannte sei $z = r\, e^{i\varphi}$. Es werde gesetzt:

$$z = k\, e^{i\varkappa} z', \qquad z' = r'\, e^{i\varphi'},$$

daher

$$\log\, r = \log r' + \log k\,,$$

$$\varphi = \varphi' + 2\, K_1 \pi\, (K_1 = 0, 1, 2 \ldots),$$

welcher Ansatz die Herbeiführung gleicher Koeffizienten von z'^m und z'^n bezweckt. Aus den von R. Mehmke durchgeführten Rechnungen folgt dies für:

$$k = \sqrt[n-m]{\frac{b}{a}} \quad \text{und} \quad \varkappa = \frac{\beta - \alpha}{n - m} + 2\, K_2 \pi\, (K_2 = 0, 1, 2 \ldots)\,.$$

Nach Division mit dem nunmehr gemeinsamen Koeffizienten entsteht die erforderliche Gleichung

$$z'^n + z'^m + l\, e^{i\lambda} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

worin

$$l = c \sqrt[n-m]{\frac{a^m}{b^n}} \quad \text{und} \quad \lambda = \gamma + \frac{m\,\alpha - n\,\beta}{n - m} + 2\, K_3 \pi\, (K_3 = 0, 1, 2 \ldots) \text{ ist.}$$

2. Anstatt, wie R. Mehmke[15]) eine räumliche Deutung heranzuziehen, wenden wir die Überlegungen des vorstehenden Punktes an, d. h. wir setzen:

$$z' = r\, (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$

und erhalten

$$r'^n (\cos n\, \varphi' + i \sin n\, \varphi') + r'^m (\cos m\, \varphi' + i \sin m\, \varphi') + l\, (\cos \lambda + i \sin \lambda) = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} r'^n \cos n\, \varphi' + r'^m \cos m\, \varphi' + l \cos \lambda = 0, \\ r'^n \sin n\, \varphi' + r'^m \sin m\, \varphi' + l \sin \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

a) Deutet man, wie dies — im Wesen — R. Mehmke tut, diese Gleichungen in einem kartesischen System mit $\log r'$ und φ' als Koordinaten, so stellen die Gleichungen (3) Kurvenscharen mit l, bzw. λ als Parameter dar und es sind dann die Koordinaten der Schnittpunkte entsprechender Kurven bereits die gesuchten φ' und r', wobei die angegebene Wahl des Koordinatensystems bezweckt, das ursprüngliche z ohne weitere Rechnungen zu erhalten, nachdem man das Achsenkreuz in eine durch die vorherberechneten Werte von k und $\varkappa$ bestimmte Lage gebracht hat. Bei dieser Vertafelungsart erweisen sich die ebenfalls von R. Mehmke eingeführten „Additionslogarithmen für komplexe Größen" als sehr wertvoll[16]).

b) Die eben gegebene Deutung in dem System $(\log r', \varphi')$ ist aber für die Lösung der gestellten Aufgabe durchaus nicht wesentlich, sie stellt sich bloß als Sonderfall einer impliziten Theorie dieser Tafeln dar. Es kann z. B. auch die Zerfällung von (3) in folgender — wohl einfachster — Weise vorgenommen werden, wieder ein (rechtwinkeliges) kartesisches Koordinatensystem vorausgesetzt:

Gleichungen des „Grundblattes":

$$\xi = r'^n \cos n\, \varphi' + r'^m \cos m\, \varphi', \qquad \eta = r'^n \sin n\, \varphi'^m + r' \sin m\, \varphi' \quad \ldots \quad (\mathrm{I}).$$

Gleichungen des „Ableseblattes":

$$\xi + l \cos \lambda = 0\,, \qquad \eta + l \sin \lambda = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{II}).$$

Durch die beiden Gleichungspaare (I) und (II), also „Grundblatt" und „Ableseblatt", wird eine solche Tafel „implizite definiert". Im Gegensatz zu der Lösung von R. Mehmke

[15]) Vgl. hierzu die zweite der in der vorstehenden Fußnote genannten Arbeiten.

[16]) Vgl. R. Mehmke: Zeichnungen zur Darstellung der „Additionslogarithmen für komplexe Größen" in W. Dyck, a. a. O., S. 31. — R. Mehmke: Additionslogarithmen für komplexe Größen, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 40 (1895), S. 15.

enthält das „Grundblatt“ nur die Größen m und n, das „Ableseblatt“ nur die Parameter l und λ. Es ist also das letztere für alle derartigen Gleichungen gemeinsam (siehe Abb. 10). Setzt man $\lambda = 0$, $\varphi' = 0$, betrachtet also den rein reellen Fall, so erhält man zunächst formal die Lösung

$$\xi = r'^{\,n} + r'^{\,m}, \qquad \eta = 0 \quad \text{(I)},$$

$$\xi = -l, \qquad \eta = 0 \quad \text{(II)}.$$

In diesem Fall muß man die Deutung z. B. im kartesischen Koordinatensystem (ξ, r') vornehmen und erhält so den von F. Klein (a. a. O., S. 94) behandelten Fall.

Schließlich werde noch ausdrücklich hervorgehoben, daß im Gegensatz zu der expliziten Theorie[17]) der „Flächenschieber“ die hier behandelte Zerfällung keinerlei geometrische Voraussetzungen (metrische, Tafelfläche u. a.) benützt.

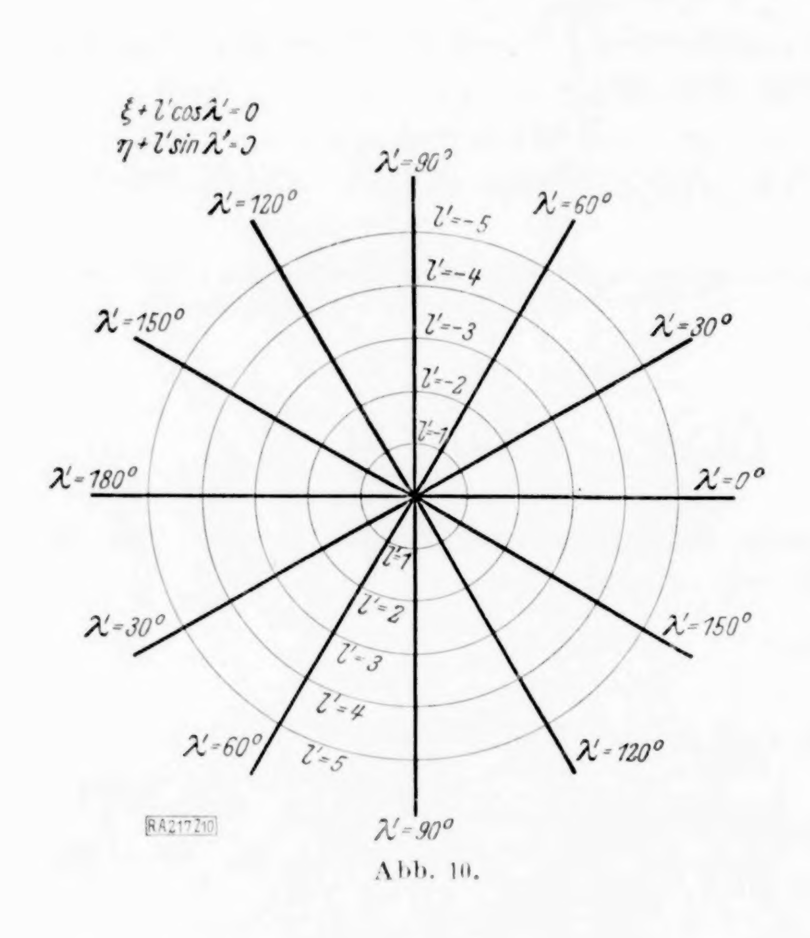


Abb. 10.

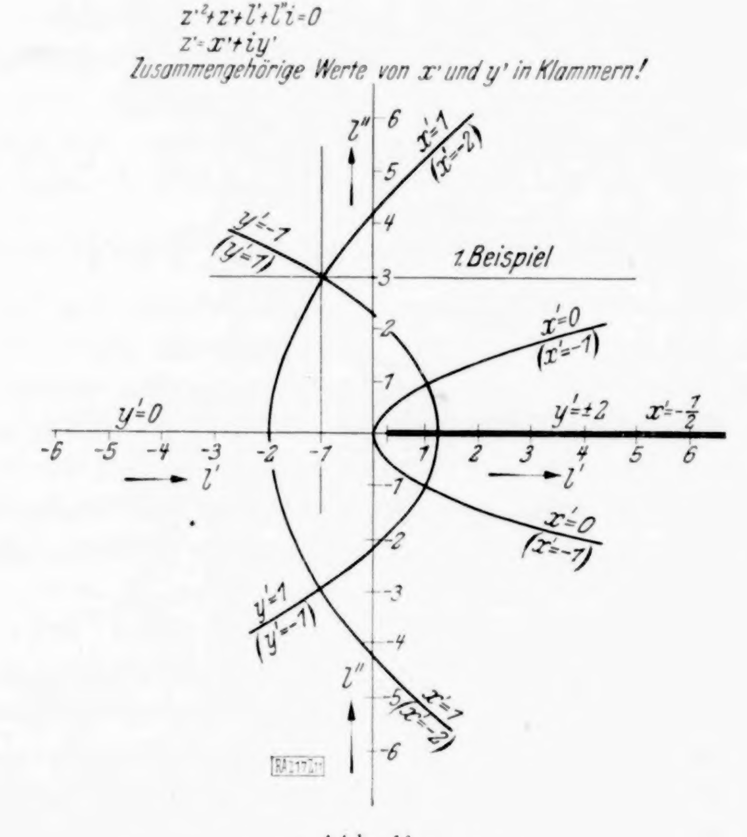


Abb. 11.
1. Beispiel: $z'^2 + z' - 1 + 3i = 0$.
$z'_1 = 1 - i$, $z'_2 = -2 + i$.
2. Beispiel: $z'^2 + z' - 2 = 0$.
$z'_1 = 1$, $z'_2 = -2$.

II. Das Vorstehende möge an dem Beispiel der quadratischen Gleichung, die gleich in ihrer vereinfachten Form (2) gegeben sei, erläutert werden:

a) Quadratische Gleichung mit $z' = x' + i\,y'$.

Man erhält aus $z'^2 + z' + l' + i\,l'' = 0$ zunächst ganz formal:

$$x'^2 - y'^2 + x' + l' = 0, \qquad 2\,x'\,y' + y' + l'' = 0.$$

Dann lautet die erforderliche Zerfällung und Deutung im rechtwinkeligen kartesischen System (ξ, η):

Gleichungen des Grundblattes:

$$\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 - y'^2 - \frac{1}{4} + \xi = 0, \qquad 2\left(x' + \frac{1}{2}\right)y' + \eta = 0 \quad \text{(I)}.$$

Gleichungen des Ableseblattes:

$$\xi = l', \qquad \eta = l'' \quad \text{(II)}.$$

Die Tafel zeigt Abb. 11. Daselbst gehören — gemäß den Gl. (I) — geklammerte Werte von x zu geklammerten von y. Dieses Verhalten, das sich bereits im vorstehenden Punkt, insbesondere bei der kubischen Gleichung zeigte, kann auch — im Sinne der Gedankengänge von B. Riemann — dahingehend ausgesprochen werden, daß das Grundblatt aus zwei auf-

[17]) Vgl. „Mitt. IV“.

einanderliegenden „Blättern" bestehend gedacht werden kann, die längs der reellen Achse ($\eta'=0$) zusammenhängen. — Wie ersichtlich, ergibt sich auf dem Ableseblatt die übliche Darstellung der komplexen Zahlen.

b) Quadratische Gleichung mit $z' = r'(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Man erhält aus $z'^2 + z' + l'(\cos\lambda' + i\sin\lambda') = 0$:

Gleichungen des Grundblattes:

$$r'^2\cos 2\varphi' + r'\cos\varphi' = \xi\,, \qquad r'^2\sin 2\varphi' + r'\sin\varphi' = \eta \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}.$$

Gleichungen des Ableseblattes:

$$l\cos\lambda = -\xi\,, \qquad l\sin\lambda = -\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}.$$

Das Grundblatt zeigt Abb. 12. Hier ist es zweckmäßig, die beiden „Blätter", die zur Bestimmung der beiden Wurzeln z_1' und z_2' dienen, gesondert zu zeichnen. Wie ganz deutlich zu ersehen, gehen die Parameterkurven für r' nach einem Umlauf von φ' (von $0°$ bis $180°$) durch die reelle Achse aus dem einen in das andere Blatt über und vereinigen sich nach dem Umlauf von φ' von $180°$ bis $360°$ wieder in dieser Achse mit ihrem Anfangspunkt. Daß die beiden Blätter spiegelbildlich zur reellen Achse liegen, werde nur kurz erwähnt. Aus den Beispielen ist es ersichtlich, daß die Tafel auch den Fall reeller Koeffizienten erledigt.

Da die oben erwähnten Tafeln von R. Mehmke nirgends abgebildet sind, kann nicht entschieden werden, ob bei denselben ebenfalls der Zusammenhang mit der Riemannschen Funktionentheorie so deutlich zutage tritt; aus den genannten Literaturstellen ist aber nichts Derartiges zu ersehen.

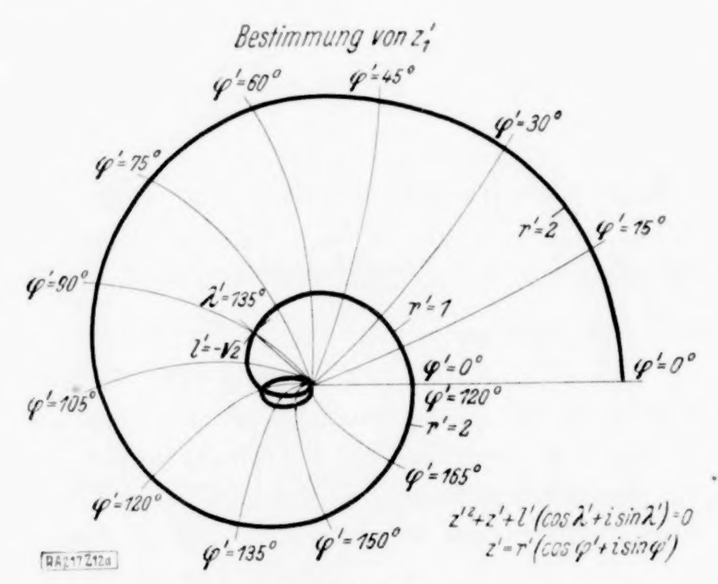


Abb. 12a.

1. Beispiel:
$z'^2 + z - \sqrt{2}\,(\cos 135° + i\sin 135°) = 0$.
$z'_1 = 1\,(\cos 90° + i\sin 90°) = i$.
z'_2: siehe Abb. 12b.

2. Beispiel:
$z'^2 + z' - 2 = 0$.
$z'_1 = 1\,(\cos 0° + i\sin 0°) = 1$.
$z'_2 = 2\,(\cos 180° + i\sin 189°) = -2$.

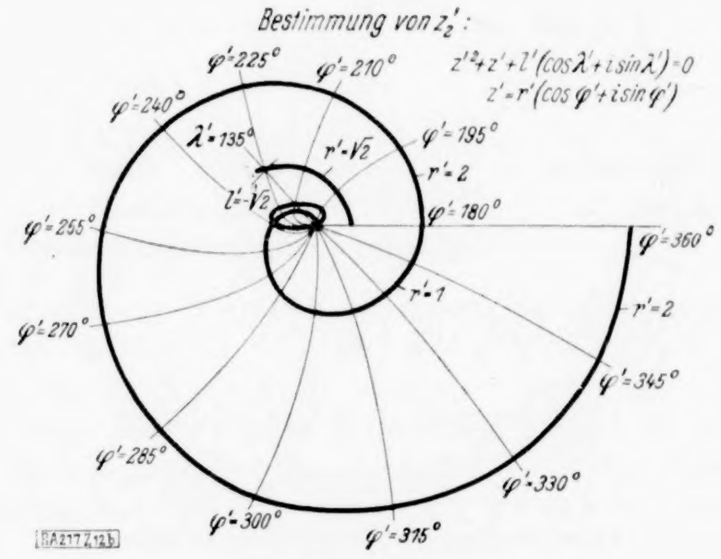


Abb. 12b.

1. Beispiel:
$z'^2 + z' - \sqrt{2}\,(\cos 135° + i\sin 135°) = 0$.
z'_1: siehe Abb. 12a.
$z'_2 = \sqrt{2}\,(\cos 225° + i\sin 225°) = -(1+i)$.

3. Beispiel:
$z'^2 + z' + 1 = 0$.
$z'_1 = 1\cdot(\cos 120° + i\sin 120°) = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$.
$z'_2 = 1\cdot(\cos 240° + i\sin 240°) = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

III. Wie ersichtlich, gelingt also die Lösung der gestellten Aufgabe auf dem erwähnten Weg auch ohne Benutzung des auf komplexe Größen ausgedehnten logarithmographischen Verfahrens von R. Mehmke und ohne — methodisch nicht ganz einwandfreie — räumliche Deutung. Es möge aber darauf hingewiesen werden, daß R. Mehmke in seiner Festschrift-Arbeit darauf aufmerksam macht, „daß man alle Gleichungen von der Form

$$c_1 z^{m_1} + c_2 z^{m_2} + c_0 = 0$$

(c_0, c_1, c_2: komplex), wo m_1, m_2 beliebige reelle Zahlen sein können, allein mit Hilfe der ein für allemal gezeichneten Additionsflächen graphisch lösen kann, indem man diese Flächen mit Ebenen schneidet, aber ohne neue krumme Flächen konstruieren zu müssen". Eine nähere Darlegung dieser wohl allgemeinsten Lösung und etwaige Tafeln gibt er infolge Raummangels leider nicht.

In diesem Zusammenhang wären schließlich noch die algebraischen Maschinen von Torres Quevedo zu nennen, die zur Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades dienen. M. d'Ocagne rechnet sie in seiner Veröffentlichung[18]) jüngsten Datums dem „calcul nomomécanique" zu, der eine Weiterführung des „calcul nomographique" bildet. Da mir nähere Angaben über derartige Maschinen unzugänglich waren, möge dieser Hinweis genügen.

3. Weitere graphische Rechentafeln für Funktionsbeziehungen zwischen vier Veränderlichen, von denen aber nur zwei unabhängig sind.

Wie ersichtlich, sind die in Punkt 1 und 2 behandelten Fälle unter diese allgemeine Bezeichnung unterzuordnen. Soviel ersichtlich, betrachtete J. Rybner[19]) derartige „Nomograms with two dependent variables" zuerst unter einheitlichem Gesichtspunkt. Im folgenden sollen die von ihm — in Fluchtlinientafeln „mit parallelen Trägern"[20]) und Ablesegerade — umgewandelten Funktionsbeziehungen als Beispiele für die im letzten Punkt behandelte implizite Theorie der Tafeln mit Ablese- und Grundblatt dargelegt werden.

α) Umwandlung von Polar- in rechtwinkelige Koordinaten.

Es ist $x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Daher

Gleichungen des Grundblattes:

$$\xi = r\cos\varphi\,,\qquad \eta = r\sin\varphi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

oder

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2,\qquad \eta = \xi\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}'),$$

Gleichungen des Ableseblattes:

$$\xi = x\,,\qquad \eta = y \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}).$$

β) Tafel für den hyperbolischen Sinus komplexen Arguments.

$$\sin h\,(a + i\,b) = p + i\,q\,,$$

$$p = \sin h\,a \cdot \cos b\,,\qquad q = \cos h\,a \cdot \sin b$$

oder

$$q^2\,\mathrm{tg}^2\,h\,a + p^2 - \sin^2 h\,a = 0\,,\qquad q^2\,\mathrm{cotg}^2\,b - p^2 - \cos^2 b = 0\,.$$

Man erhält als

Gleichungen des Grundblattes:

$$\eta\,\mathrm{tg}^2\,h\,a + \xi - \sin^2 h\,a = 0\,,\qquad \eta\,\mathrm{cotg}^2\,b - \xi - \cos^2 b = 0 \quad\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}),$$

Gleichungen des Ableseblattes:

$$\xi = p^2,\qquad \eta = q^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}).$$

γ) Tafel für den hyperbolischen Tangens komplexen Arguments.

$$\mathrm{tg}\,h\,(a + i\,b) = r\,e^{i\,\Theta},\qquad r^2 = \frac{\cos h\,2\,a - \cos 2\,b}{\cos h\,2\,a + \cos 2\,b}\,,\qquad \mathrm{tg}\,\Theta = \frac{\sin 2\,b}{\sin h\,2\,a}$$

oder

$$\sin^2 h\,2\,a \cdot (r^2 - 1)^2 + \sin^2 2\,b\,(r^2 + 1)^2 - 4\,r^2 = 0\,,\qquad \sin^2 h\,2\,a \cdot \mathrm{tg}^2\,\Theta - \sin^2 b = 0\,.$$

Dann sind die

Gleichungen des Grundblattes:

$$\xi\,(r^2 - 1)^2 + \eta\,(r^2 + 1)^2 - 4\,r^2 = 0\,,\qquad \xi\,\mathrm{tg}^2\,\Theta - \eta = 0 \quad\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}),$$

Gleichungen des Ableseblattes:

$$\xi = \sin^2 h\,2\,a\,,\qquad \eta = \sin^2 2\,b \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}).$$

[18]) M. d'Ocagne: Les progrès des procédés mécaniques et graphiques de calcul depuis cinquante ans. Le Génie civil. Numéro spécial publié à l'occasion du Cinquanténaire de la Fondation du „Génie civil". Novembre 1930, p. 8.

[19]) Nomograms. General Electric Review 33 (1930), no 3, p. 164.

[20]) Vgl. hierzu „Mitt. IV".

δ) Die eingangs erwähnte Vertafelungsart kann man folgendermaßen erklären: Betrachtet man z. B. den letzten Fall γ, so ist ersichtlich, daß das Grundblatt durch ein Gleichungspaar festgelegt ist, das eine Funktionsbeziehung (von der kanonischen Form I) zwischen den Veränderlichen ξ, η, r und eine solche (von der kanonischen Form II) zwischen ξ, η, Θ enthält. Diese Funktionsbeziehungen lassen sich daher z. B. durch Tafeln mit parallelen Trägern für ξ und η darstellen, die übereinander gelagert werden können. Die vorläufig ganz unbestimmt gebliebenen Teilungen (Leitern) auf den ξ- bzw. η-Trägern werden nun durch das Ableseblatt eindeutig festgelegt, mittelbar daher auch die Ablesekurve, im vorliegenden Fall Ablesegerade. — Die von J. Rybner hergeleitete Bedingung für derartige Tafeln ist im Hinblick auf den vorstehenden Punkt wohl nur als hinreichend zu bezeichnen.

Selbstverständlich lassen sich die in den Punkten 2 und 3 gegebenen Tafeln in die Form von Netztafeln bzw. von Polarnomogrammen (mechanischen Zeigerinstrumenten) umsetzen.

3. Über eine nomographische Schließungsaufgabe. In seinem jüngst erschienenen Aufsatz „Nomogramm der allgemeinen Gleichung dritten Grades" formt H. Vl. Vranič[21]) im Anschluß an B. M. Konorski die Gleichung

$$t^3 + a\,t^2 + b\,t + c = 0$$

derart um, daß sich — im Gegensatz zu der von M. d'Ocagne herrührenden oder der ähnlichen Tafel von R. Mehmke — bloß eine bezifferte Kurve anstatt zweier Kurvenscharen ergibt. Er muß dabei die methodische Unreinheit mit in Kauf nehmen, gewisse Produkte aus den Koeffizienten der Gleichung z. B. mittels Rechenschieber durch Nebenrechnung zu ermitteln. Und zwar sind dies bei ihm die Größen

$$\alpha = \frac{2\,a\,b}{c} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{b^3}{c^2},$$

die auf zwei parallelen Geraden A und B von gegebenen Nullpunkten aus in gleichem Sinn aufzutragen sind und durch die die „Ablesegerade" festgelegt ist. Es soll nun folgende Aufgabe behandelt werden, die wohl theoretisches Interesse beanspruchen dürfte:

Es sind unter Verwendung der Tafeln für die in Betracht kommenden „kanonischen Formen" die genannten Größen α und β aus den Größen a, b, c auf nomographischem Weg derart zu bilden, daß die Ablesegerade sich als Schlußlinie des so entstehenden ununterbrochenen Geradenzuges ergibt. (Stellt man diese letzter Forderung nicht, so ist die Aufgabe trivial.) Wie leicht ersichtlich, handelt es sich also darum, statt der Tafel mit Doppelkotenpunkten eine solche mit mehrfachen Fluchten herzuleiten, die einen geschlossenen Linienzug bilden.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die gestellte Aufgabe zwei verschiedene Lösungen besitzt, je nachdem von welcher der Leitern A und B man ausgeht. — Wie ersichtlich sein wird, wird bloß die bekannte Tafel mit zwei parallelen Trägern zur Bildung des Ausdrucks $\alpha = \beta\,\gamma$ (s. Abb. 13) zur Anwendung gelangen.

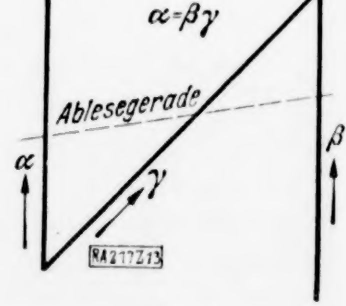


Abb. 13.

α) Es möge zunächst von der Leiter A ausgegangen werden. Dann lauten die einzelnen Schritte folgendermaßen:

a) Bildung von $2\dfrac{a\,b}{c} = s$:

$$2\,a\,b = X, \qquad X\frac{1}{c} = s.$$

b) Überführung von s in $\dfrac{b^3}{c^2}$: Es liegt nahe, einen Faktor Y so zu bestimmen, daß

$$2\frac{a\,b}{c}\,Y = \frac{b^3}{c^2}, \qquad Y = \frac{b^2}{2\,a\,c}, \qquad s\,b^2 = u, \qquad \frac{u}{a} = v, \qquad \frac{v}{2\,c} = \frac{b^3}{c^2} = t.$$

[21]) Diese Z., Bd. 10 (1930), H. 6, S. 623.

Wie ersichtlich, ergibt sich zunächst t ungleichsinnig parallel mit s. Dies läßt sich aber durch „Verzifferung" beheben[22]. — Den so entstandenen, aus 6 „Gliedern" bestehenden Linienzug zeigt Abb. 14.

β) Geht man von der Leiter B aus, so lauten die erforderlichen Schritte:

a) Bildung von $t = \frac{b^3}{c^2}$.

b) Überführung von $t = \frac{b^3}{c^2}$ in $2\frac{a\,b}{c}$. Wie früher ist ein Faktor Z so zu bestimmen, daß

$$\frac{b^3}{c^2} Z = 2\frac{a\,b}{c}, \qquad Z = \frac{2\,a\,c}{b^2},$$

$$t \cdot 2\,a = u, \qquad \frac{u}{b^2} = v, \qquad c\,v = s.$$

Auch hier ist die c-Leiter zu „verziffern". Der so entstandene Linienzug besteht diesmal aus 5 „Gliedern" (s. Abb. 15).

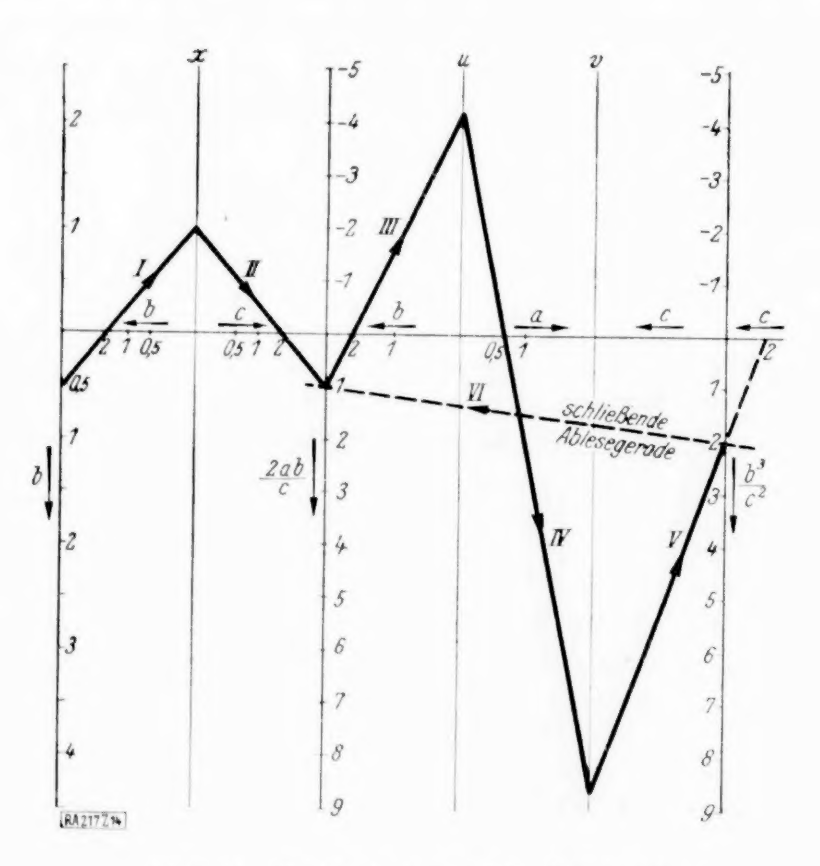


Abb. 14. Beispiel: $a = 0{,}5$, $b = c = 2$.

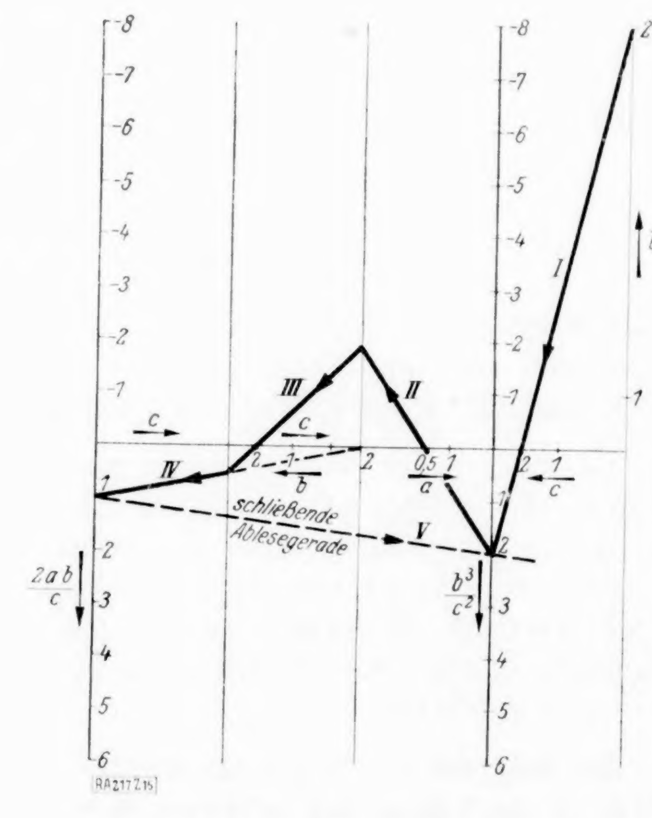


Abb. 15. Beispiel: $a = 0{,}5$, $b = c = 2$.

γ) Wie leicht einzusehen, ist die Anordnung der Teilsysteme u, v usw. innerhalb weiter Grenzen veränderlich, das wesentliche ist, daß die Punkte auf den Leitern in ganz bestimmter Reihenfolge durchlaufen werden; es sind hierbei die Gliederzahlen 5 und 6 Minima. Anderseits lassen sich durch Multiplikation der Zähler und Nenner der benutzten Brüche beliebig viele Glieder einschalten. Es böte vielleicht Interesse, diesen Gedanken bei Annahme einer Einschaltungsvorschrift näher zu verfolgen.

[22]) Vgl. hierzu z. B. H. Schwerdt, a. a. O., S. 53.

Kugelsymmetrische Systeme.

Von *H. Boegehold* und *M. Herzberger* in Jena.

Mitteilung aus der Firma Carl Zeiß.

In der Strahlenoptik sind wegen ihrer Bedeutung für die Praxis die Umdrehungsfolgen besonders ausführlich behandelt worden. Sie sind rotationssymmetrisch (drehsymmetrisch) um eine Gerade, die Drehachse. Eine Fragestellung unserer letzten Arbeit[1]) legte die Beschäftigung mit einer Sonderklasse nahe, mit Folgen, die drehsymmetrisch sind um jede durch einen festen Punkt (den Mittelpunkt) gehende Gerade. Wir haben ihnen den Namen „kugelsymmetrische Systeme" gegeben, und es ist unsere Absicht, in dieser Arbeit ihre Gesetze möglichst vollständig anzugeben. Wir werden im ersten Teil das Winkeleikonal für kugelsymmetrische Systeme aufstellen und die Differentialgleichung des gemischten Eikonals bestimmen. Wir werden dann erkennen, welche besondere Eigenschaft wegen der vollkommenen Symmetrie eine im Mittelpunkt angebrachte Blende hat. — Der Mittelpunkt entspricht sich selbst und wird als Hockinscher und aplanatischer Punkt auf sich selbst scharf abgebildet. Darauf werden wir zeigen, daß die scharfe Abbildung auch nur eines weiteren Punktes nur möglich ist, wenn es sich entweder um ein den ganzen Raum scharf abbildendes Fernrohr der Vergrößerung $n:n'$ oder um eine der in unserer früheren Arbeit behandelten Folgen handelt. Es werden zwei Kugeln mit demselben Mittelpunkt den Vergrößerungen β' und $\frac{n^2}{n'^2\beta'}$ abgebildet. In diesem Falle (hierher gehört u. a. die einzelne brechende Kugelfläche) sprechen wir von „zweikugelabbildenden" Systemen.

Im zweiten Teil werden wir als Sonderfall die konzentrischen Systeme untersuchen, deren sämtliche Flächen Kugeln mit gemeinsamem Mittelpunkt sind. Es wird sich zeigen, daß man die Aufgabe, alle raumabbildenden und alle zweikugelabbildenden konzentrischen Folgen mit gegebener Flächenzahl zu bestimmen, in geschlossener Form angeben kann; und es werden alle diese Systeme bis zu vier bzw. drei Flächen aufgestellt. Es werden die Beziehungen zwischen den Radien und Brechzahlen abgeleitet und die so erhaltenen Folgen eingehend auf ihre Eigenschaften untersucht.

Nach Abschluß unserer Arbeit teilte uns Herr Prof. Bauersfeld mit, daß er etwa um 1914 einige Sonderfälle untersucht hat. Da der Fall der scharfen Abbildung in diesen Fällen, wie wir im letzten Kapitel zeigen werden, auf Systeme führt, die optisch ohne allzu große Bedeutung sind, führte Prof. Bauersfeld die Aufgabe weiter, und er suchte insbesondere für parallel einfallende Strahlen die Systeme aufzustellen, die zwar keine vollständige Abbildung, aber eine Abbildung in erster, zweiter usw. Näherung gewährleisten. Sein Beweisgang verlief teilweise ähnlich dem, den wir 20 Jahre später unabhängig für das allgemeine Problem gefunden haben. Besonders überraschte die Verwendung der Newtonschen Gleichungen. Prof. Bauersfeld stellte uns sein bisher unveröffentlichtes Manuskript zur Verfügung, dessen wichtigste Ergebnisse wir im Anhang zusammenstellen.

I. Teil.

Die kugelsymmetrischen Systeme.

§ 1. Das Eikonal.

Die in der Einleitung gegebene Definition der kugelsymmetrischen Systeme läßt folgendes erkennen. Betrachten wir die Abbildung eines beliebigen Dingpunktes, so ist die durch ihn und den Mittelpunkt[2]) gehende Gerade eine Symmetrieachse der Abbildung, insbesondere ist die zugehörige Bildkaustik zu dieser Achse symmetrisch. Alle vom Dingpunkt ausgehenden Strahlen schneiden bildseitig diese Symmetrieachse. Die durch Dingstrahl und Mittelpunkt gelegte Ebene enthält stets den Bildstrahl. Umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft die Kugelsymmetrie der Abbildung; es gilt also:

Satz 1. Eine kugelsymmetrische Abbildung ist dadurch gekennzeichnet, daß Ding- und Bildstrahl stets in einer Ebene durch einen festen Punkt, den Systemmittelpunkt, liegen.

[1]) Kann man zwei verschiedene Flächen durch dieselbe Folge von Umdrehungsflächen scharf abbilden? Comp. math. 1935 **1**. 448/76.

[2]) Zum Eikonal kann man bekanntlich eine willkürliche Konstante hinzufügen. Aus Gründen der sprachlichen Bequemlichkeit werden wir im folgenden die Konstante Null setzen. Dann fallen die Koordinatenanfangspunkte räumlich zusammen. Die Gesetzmäßigkeiten ändern sich natürlich nicht, wenn die Mittelpunkte des Ding- und Bildraumes auseinanderfallen.

Diese Tatsachen wollen wir benützen, um die kugelsymmetrischen Systeme analytisch zu untersuchen. Wir wählen ding- und bildseitig ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung im Mittelpunkt liegt und dessen Achsen übereinstimmen. Ein Dingstrahl sei gegeben durch seine Richtungskosinus, $\xi, \eta, \zeta = \cos\sigma = \sqrt{1-(\xi^2+\eta^2)}$ und die Koordinaten x, y seines Durchstoßpunktes mit der Ebene $z = 0$, ebenso der Bildstrahl durch $\xi', \eta', \zeta' = \cos\sigma' = \sqrt{1-(\xi'^2+\eta'^2)}$ und x', y'. Satz 1 läßt sich dann analytisch so fassen, daß gleichzeitig die beiden folgenden Gleichungen bestehen müssen:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ n\xi & n\eta & n\cos\sigma \\ n'\xi' & n'\eta' & n'\cos\sigma' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ n'\xi' & n'\eta' & n'\cos\sigma' \\ n\xi & n\eta & n\cos\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Mehr können wir aus den Symmetrieeigenschaften allein nicht ableiten, zum weiteren Eindringen müssen wir auf die Eigenschaften der optischen Abbildung zurückgreifen.

Seit Hamilton wissen wir, daß sich die optischen Abbildungen mit Hilfe einer einzigen Funktion (von Hamilton charakteristische Funktion, von Bruns Eikonal genannt) ausdrücken lassen. Wir wählen zunächst das sogenannte Winkeleikonal W, das nur von dem Richtungskosinus $(\xi, \eta, \xi' \eta')$ von Ding- und Bildstrahl abhängt. W ist bekanntlich geometrisch der Lichtweg zwischen den Fußpunkten der vom Ursprung auf Ding- und Bildstrahl gefällten Lote. Da unser System um die $z\,(z')$-Achse drehsymmetrisch ist, ist W darstellbar als Funktion der drei Größen:

$$\left.\begin{aligned} a &= n^2(\xi^2+\eta^2) \\ b &= 2\,n\,n'(\xi\xi'+\eta\eta') \\ c &= n'^2(\xi'^2+\eta'^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Nach Bruns gelten nun die Gleichungen $\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} = W_x \text{ gesetzt}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\,W_a\,n\,\xi + 2\,W_b\,n'\,\xi'; & y &= 2\,W_a\,n\,\eta + 2\,W_b\,n'\,\eta' \\ x' &= -2\,W_b\,n\,\xi - 2\,W_c\,n'\,\xi'; & y' &= -2\,W_b\,n\,\eta - 2\,W_c\,n'\,\eta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Setzen wir (3) in (1) ein, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} 2\,W_b\,n'\cos\sigma' + 2\,W_a\,n\cos\sigma &= 0 \\ 2\,W_c\,n'\cos\sigma' + 2\,W_b\,n\cos\sigma &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Das gibt, in (3) eingesetzt, die beiden Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x\,n\cos\sigma &= x'\,n'\cos\sigma' \\ y\,n\cos\sigma &= y'\,n'\cos\sigma' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Nun ist aber, wegen (2),

$$\left.\begin{aligned} n\cos\sigma &= \sqrt{n^2-a} \\ n'\cos\sigma' &= \sqrt{n'^2-c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Die durch Einsetzen von (6) in (4) entstehende lineare Differentialgleichung für W läßt sich integrieren. Wir finden, W ist eine — an sich beliebige — Funktion[3]) von

$$\vartheta = \frac{b}{2} + \sqrt{(n^2-a)(n'^2-c)} = n\,\xi\,n'\,\xi' + n\,\eta\,n'\,\eta' + n\,\zeta\,n'\,\zeta' = n\,n'\cos(\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}') \quad \ldots \quad (7),$$

oder in Worten:

Satz 2. In kugelsymmetrischen Systemen hängt das Winkeleikonal W allein ab von dem Winkel, den Dingstrahl (Richtung $\mathfrak{s}$) und Bildstrahl (Richtung $\mathfrak{s}'$) miteinander bilden.

Wir bekommen für kugelsymmetrische Systeme nun

$$\left.\begin{aligned} W_a &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n'^2-c}{n^2-a}}\,W_\vartheta \\ W_b &= \frac{1}{2}\,W_\vartheta \\ W_c &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2-a}{n'^2-c}}\,W_\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

[3]) Natürlich darf W_ϑ nirgends verschwinden.

Für die Gleichungen von Bruns (3) finden wir:

$$\left.\begin{aligned} x\sqrt{n^2-a} &= x'\sqrt{n'^2-c} = -W_\vartheta\left(\sqrt{n'^2-c}\,n\xi-\sqrt{n^2-a}\,n'\xi'\right)\\ y\sqrt{n^2-a} &= y'\sqrt{n'^2-c} = -W_\vartheta\left(\sqrt{n'^2-c}\,n\eta-\sqrt{n^2-a}\,n'\eta'\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Das Winkeleikonal versagt für brennpunktlose Systeme. Wir müssen infolgedessen versuchen, auch das gemischte Eikonal V zu behandeln. V ist bekanntlich, bei unserer Wahl der Koordinaten, der Lichtweg vom Durchstoßpunkt des Strahls mit der Ebene $z=0$ bis zum Fußpunkt des vom Mittelpunkt auf den Bildstrahl gefällten Lotes. V hängt nur ab von $x, y, \xi'\eta'$. Für um die $z(z')$-Achse rotationssymmetrischer Systeme insbesondere ist V eine Funktion von drei zusammengesetzten Größen, die wir, da Verwechslungen kaum zu befürchten sind, wieder mit a, b, c bezeichnen wollen, und zwar sei hier

$$\left.\begin{aligned} a &= x^2+y^2\\ b &= 2\left(n'\xi'x+n'\eta'y\right)\\ c &= n'^2\xi'^2+n'^2\eta'^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Die Gleichungen von Bruns geben dann allgemein:

$$\left.\begin{aligned} n\xi &= -2V_a x-2V_b n'\xi' \qquad & n\eta &= -2V_a y-2V_b n'\eta'\\ x' &= -2V_b x-2V_c n'\xi' \qquad & y' &= -2V_b y-2V_c n'\eta'\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Wir finden aus (11) allgemein:

$$\left.\begin{aligned} n\cos\sigma &= \sqrt{n^2-(n\xi)^2-(n\eta)^2} = \sqrt{n^2-4\left(V_a^2a+V_aV_bb+V_b^2c\right)}\\ n'\cos\sigma' &= \sqrt{n'^2-c}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Benutzen wir nun unsere Grundgleichungen (5), so erhalten wir mit Hilfe von (11) und (12) die beiden Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} V_c &= 0\\ -2V_b\sqrt{n'^2-c} &= \sqrt{n^2-4\left(V_a^2a+V_aV_bb+V_b^2c\right)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

V ist also eine Funktion allein von a und b, die als solche der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung

$$4\left(V_a^2a+V_aV_bb+V_b^2n'^2\right)=n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

genügt. Die Auflösung dieser Differentialgleichung läßt sich zurückführen auf die Auflösung einer linearen partiellen Differentialgleichung.

Sei $v(ab)$ eine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial a}(2av+b)+\frac{\partial v}{\partial b}(bv+2n'^2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

dann gibt

$$\left.\begin{aligned} V_a &= -\frac{n}{2n'}\,\frac{v}{\sqrt{1+\frac{v}{n'^2}(b+av)}}\\ V_b &= -\frac{n}{2n'}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v}{n'^2}(b+av)}}\\ V_c &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

die allgemeine Lösung unseres Problems. (15) läßt sich integrieren. Sei φ eine beliebige Funktion einer Variablen v, so muß v der impliziten Gleichung

$$\varphi(v)=\frac{n}{2n'}\,\frac{2n'^2+bv}{\sqrt{1+\frac{v}{n'^2}(b+av)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

genügen. Eine triviale Lösung von (15), nämlich

$$v=0 \qquad \varphi(v)=nn' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

wollen wir gesondert betrachten. Wir finden

$$V_a=V_c=0, \qquad V_b=-\frac{n}{2n'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Das führt auf

$$V = -\frac{n}{2n'}\, b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$

Wir bekommen das von uns schon häufig behandelte Knotenpunktsystem, das den ganzen Raum scharf und ähnlich im Verhältnis der Brechzahlen vergrößert abbildet.

Die Gleichungen von Bruns ergeben allgemein bei kugelsymmetrischen Systemen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v}{n'^2}(b+a\,v)}}\left(\xi'+\frac{v}{n'}\,x\right), & \eta &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v}{n'^2}(b+a\,v)}}\left(\eta'+\frac{v}{n'}\,y\right) \\ x' &= \frac{n}{n'}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v}{n'^2}(b+a\,v)}}\,x, & y' &= \frac{n}{n'}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v}{n'^2}(b+a\,v)}}\,y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21),$$

wobei v eine Lösung von (15) bzw. (17) mit willkürlicher Funktion φ ist.

Wir wollen hier am Schluß dieses ersten Paragraphen auf folgendes aufmerksam machen: W ist eine Funktion einer einzigen Variablen ϑ, nimmt also nur einfach unendlich viele Werte an, ist insbesondere dann vollständig bestimmt, wenn wir für die von einem festen Punkt ausgehenden Strahlen über die Abbildung Bescheid wissen. Aus (9) und (7) können wir dann $W(\vartheta)$ als Funktion von ϑ bestimmen, und erhalten durch Integration das gesuchte Eikonal.

Ähnlich geht es mit V. Kennen wir z. B. die Abbildung eines Punktes, so läßt sich in (17) $\varphi(v)$ bestimmen. Die Auflösung von (17) nach v gibt dann v als Funktion von a, b und damit die gewünschten Abbildungsgleichungen.

§ 2. Der Mittelpunkt als ausgezeichnete Blende.

a) Der Mittelpunkt als orthoskopische Blende.

Betrachten wir jetzt die Strahlen durch den Systemmittelpunkt ($x = y = x' = y' = 0$).

Wir finden

$$\xi_0 = \xi'_0, \qquad \eta_0 = \eta'_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22),$$

das heißt

Satz 3. Die Strahlen durch den Mittelpunkt eines kugelsymmetrischen Systems gehen ungebrochen hindurch.

Insbesondere erfüllen diese Strahlen wegen $\sigma_0 = \sigma'_0$ natürlich auch die Airysche Tangentenbedingung

$$n' \operatorname{tg} \sigma'_0 = \beta'_B\, n \operatorname{tg} \sigma_0 \quad \text{mit} \quad \beta'_B = \frac{n'}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23),$$

oder

Satz 4. Der Mittelpunkt eines kugelsymmetrischen Systems wirkt als orthoskopische Blende, d. h. die durch sie gehenden Hauptstrahlen vermitteln eine verzeichnungsfreie optische Projektion einer beliebigen Einstellebene auf eine beliebige parallele Mattscheibenebene.

b) Der Mittelpunkt als raumstigmatische Blende.

Die von einem beliebigen Dingpunkt ausgehenden Strahlen bilden, wie wir am Anfang sahen, nach dem Durchtritt durch ein kugelsymmetrisches System ein rotationssymmetrisches Strahlenbündel, dessen Drehachse die Verbindungslinie von Dingpunkt und Mittelpunkt ist. Insbesondere wird also ein vom Dingpunkt ausgehendes dünnes Bündel mit dieser Achse als Hauptstrahl sich bildseitig wieder in einem Punkt vereinigen. Da das für jeden Dingpunkt gilt, so haben wir

Satz 5. In einem kugelsymmetrischen System wird eine im Mittelpunkt angebrachte Blende als raumstigmatische Blende wirken, d. h. jedes stigmatische fadenförmige Lichtstrahlenbündel, dessen Achse durch den Mittelpunkt geht, bleibt stigmatisch.

Die Zuordnung von Ding- und Bildpunkt ergibt sich wie folgt. Sei $z\,(z')$ die Entfernung eines Ding(Bild-)punktes vom Mittelpunkt (der ja gleichzeitig Knotenpunkt ist), so finden wir (so z. B. Herzberger: Strahlenoptik, S. 66, Formel 25 und 25a), im Vergleich mit unserer Formel (11).

$$\frac{n'}{z} - \frac{n}{z'} = \frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'} = -\frac{n'}{2n}\, V^0{}_a = v_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Insbesondere sehen wir wieder daraus, daß in brennpunktlosen Systemen v für $a = b = 0$ verschwindet.

c) Der Mittelpunkt als raumasymmetriefreie Blende.

Bis jetzt haben wir nur die Wirkung einer engen Blende im Mittelpunkt untersucht; wir wollen jetzt zeigen, daß auch eine weite im Mittelpunkt angebrachte Blende eine Sonderstellung einnimmt.

Betrachten wir die Abbildung eines achsensenkrechten Flächenelementes durch ein kugelsymmetrisches System. Jedem Punkt entspricht bildseitig eine rotationssymmetrische Kaustik. Alle Umdrehungsachsen gehen durch den Mittelpunkt; anders ausgedrückt: der Mittelpunkt wirkt für den Dingpunkt als isoplanatische (komafreie, asymmetriefreie) Blende. Eine Blende, die für jeden Achsenpunkt als asymmetriefreie Blende wirkt, wurde von M. Herzberger (Strahlenoptik S. 122/3) als raumasymmetriefreie Blende bezeichnet.

Wir haben also:

Satz 6. Der Mittelpunkt eines kugelsymmetrischen Systems ist raumasymmetriefreie Blende.

Wie F. Staeble 1919 gezeigt hat[4]), ist die isoplanatische Abbildung dadurch gekennzeichnet, daß die von den Pupillen auf Ding- und Bildstrahl gefällten Lote p, p' der Bedingung genügen

$$p' = \beta'_B \, p \qquad (25),$$

wo β'_B die Vergrößerung angibt, mit der die Pupillen nach der Gaußischen Optik abgebildet werden. In unserm Falle ist

$$\beta'_B = \frac{n}{n'} \qquad (26).$$

Wegen der Rotationssymmetrie und weil die Blende für alle Achsenpunkte als isoplanatische Blende gilt, gewinnen wir daher

Satz 7. In einem kugelsymmetrischen System genügen die vom Mittelpunkt auf Ding- und Bildstrahl gefällten Lote der Bedingung

$$n\,p = n'\,p' \qquad (27).$$

Diese hübsche Formel wollen wir nochmal herleiten.

Aus den Formeln von Bruns (3) oder (11) folgt

$$n\,(\xi\,y - \eta\,x) = n'\,(\xi'\,y' - \eta'\,x') \qquad (28).$$

Ferner gibt der Satz von Pythagoras:

$$\left.\begin{aligned} n^2\,p^2 &= n^2\,(x^2+y^2) - n^2\,(x\,\xi + y\,\eta)^2 = n^2\,(x^2+y^2)\cos^2\sigma + n^2\,(x\,\eta - y\,\xi)^2 \\ n'^2\,p'^2 &= n'^2\,(x'^2+y'^2)\cos^2\sigma' + n'^2\,(x'\,\eta' - y'\,\xi')^2 \end{aligned}\right| \qquad (29).$$

Die Gl. (28) und (29) geben in Verbindung mit (5) unsere Gl. (27).

§ 3. Die Abbildungsgesetze in kugelsymmetrischen Systemen.

a) Die Abbildung des Mittelpunktes.

Wir haben schon im vorigen Abschnitt gesehen, daß der Mittelpunkt scharf abgebildet wird, und zwar so, daß die Strahlen ungebrochen hindurchgehen.

Wegen

$$\sigma_0 = \sigma'_0 \qquad (30)$$

genügen die Strahlen sowohl der Abbeschen Sinusbedingung

$$\left.\begin{aligned} n \sin\sigma_0 &= \beta'_0\, n' \sin\sigma'_0 \\ \beta'_0 &= \frac{n}{n'} \end{aligned}\right\} \qquad (31),$$

als auch der Hockinschen Bedingung

$$\left.\begin{aligned} n\,(\cos\sigma_0 - 1) &= n'\,\beta'_0\,(\cos\sigma'_0 - 1) \\ \beta'_0 &= \frac{n}{n'} \end{aligned}\right\} \qquad (32),$$

das heißt

Satz 8. In einem kugelsymmetrischen System ist der Mittelpunkt zugleich aplanatischer und Hockinscher Punkt. Ein ganzes, ihn enthaltendes Raumelement wird scharf mit der Vergrößerung $n : n'$ abgebildet.

[4]) Isoplanatische Korrektion und Proportionalitätsbedingung. Münchn. Sitzungsber. 1919, 163/96.

b) Die zweikugelabbildenden Systeme.

Jedem andern Punkt entspricht bildseitig eine rotationssymmetrische Kaustik. Wir wollen nun untersuchen, ob außer dem Mittelpunkt noch ein weiterer Punkt scharf abgebildet werden kann.

Wegen der Kugelsymmetrie folgt aus der scharfen Abbildung eines Punktes die scharfe Abbildung einer ganzen Kugelschale um den Mittelpunkt. Hieraus folgt, daß die Sinusbedingung erfüllt sein muß. Wir werden jedoch noch mehr ableiten können.

Zunächst untersuchen wir nichtbrennpunktlose Systeme.

Dann können wir das Winkeleikonal benützen. Wir nehmen also an, ein in der Entfernung z vom Mittelpunkt gelegener Punkt werde scharf abgebildet. Der Bildpunkt habe die Entfernung z'. Ding- und Bildpunkt kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf der Achse annehmen. Sei der zugehörige Wert der Gaußischen Vergrößerung

$$\beta' = \frac{n}{n'}\mu \quad \ldots \ldots \quad (33),$$

dann ist nach den Gesetzen der Gaußischen Optik (der Mittelpunkt ist positiver Knotenpunkt!)

$$\left.\begin{aligned} n z &= \frac{1-\mu}{\mu} n f' \\ n' z' &= (1-\mu) n f' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Die Richtungskosinus der durch den Punkt der Entfernung z gehenden Strahlen mögen durch den Zeiger Null gekennzeichnet werden. Dann gibt die Sinusbedingung

$$\xi'_0 = \frac{1}{\mu}\xi_0 \quad \ldots \ldots \quad (35),$$

also

$$b_0 = 2\frac{n'}{n\mu}a_0, \qquad c_0 = \frac{n'^2}{n^2\mu^2}a_0.$$

Die einzige Variable, die in unserem Eikonal vorkommt, ist ϑ. Sie läßt sich unter Benutzung unserer Strahlen als Funktion von a_0 schreiben, und zwar findet man

$$\vartheta = \frac{n'}{n\mu}\left[a_0 + \mu\sqrt{(n^2 - a_0)\left(n^2 - \frac{1}{\mu^2}a_0\right)}\right] \quad \ldots \ldots \quad (36).$$

Für unsere Strahlen gilt ferner $x = z\,\mathrm{tg}\,\sigma$, $x' = z'\,\mathrm{tg}\,\sigma'$, oder nach (5) und (6):

$$x\sqrt{n^2 - a} = x'\sqrt{n'^2 - c} = z n \xi_0 = z' n' \xi'_0 \quad \ldots \ldots \quad (37).$$

Setzen wir (34) bis (37) in (9) ein, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} W_\vartheta &= -\frac{z n \xi_0}{\sqrt{n'^2 - c_0}\, n\xi_0 - \sqrt{n^2 - a}\, n'\xi'_0} = -\frac{\frac{1-\mu}{\mu}\frac{n f'}{n'}}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{\mu^2}a_0} - \frac{1}{\mu}\sqrt{n^2 - a_0}} \\ &= \frac{\mu - 1}{\mu}\frac{f'}{n'}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right) - \frac{2}{\mu n n'}\vartheta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (38).$$

Wir integrieren Gl. (38) jetzt nach ϑ und finden unser Eikonal in geschlossener Form:

$$W = (1-\mu) n f'\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{\mu n n'}\vartheta} = n f'\sqrt{\left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2\right)\left(\mu + \frac{1}{\mu} - \frac{2}{n n'}\vartheta\right)} \quad \ldots \quad (39).$$

Das durch (39) dargestellte Eikonal ist aber identisch mit einem von uns früher[5]) untersuchten Fall. Wir stellten dort fest, daß die durch (39) dargestellte Abbildung zwei zum Kugelmittelpunkt konzentrische Kugeln scharf abbildet. Dasselbe kann man auch aus (39) erkennen, weil eine Vertauschung von μ mit $\frac{1}{\mu}$ das Eikonal nicht ändert. Die Radien der Ding- und Bildkugeln sind gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} n R_1 &= \frac{1-\mu}{\mu} n f' \qquad \text{und} \qquad & n' R'_1 &= (1-\mu) n f' \\ n R_2 &= (1-\mu) n f' & n' R'_2 &= \frac{1-\mu}{\mu} n f' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (40).$$

[5]) Siehe Formel (95) der Anm. 1) angeführten Arbeit.

Wir haben also gefunden:

Satz 9. Wird in einem nichtbrennpunktlosen kugelsymmetrischen System auch nur ein vom Mittelpunkt verschiedener Dingpunkt scharf abgebildet, so ist das System ein zweikugelabbildendes System.

Für $\mu = -1$ fallen die beiden Dingkugeln und die beiden Bildkugeln zusammen, sie gehen durch die negativen Knotenpunkte.

c) Die raumabbildenden Systeme.

Wir untersuchen jetzt, unter welchen Voraussetzungen eine scharfe Abbildung eines Punktes in brennpunktlosen, kugelsymmetrischen Systemen möglich ist.

Hier müssen wir das gemischte Eikonal V verwenden.

Wegen der Rotationssymmetrie können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, unser scharf abgebildeter Dingpunkt liege auf der x-Achse, habe also die Koordinaten x_0, 0.

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= x_0^2 \\ b_0 &= 2\,n'\,x_0\,\xi' \\ c_0 &= n'^2(\xi'^2 + \eta'^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (41);$$

da wegen der Brennpunktlosigkeit v für $a = b = 0$ verschwinden muß, lehrt Gl. (21), daß unser System die Fernrohrvergrößerung Eins besitzen muß. Das gibt, wenn es irgend einen Punkt scharf abbildet, nach (5)

$$n'\,x'_0 = n\,x_0 \quad \ldots \quad (42),$$

also wegen (21)

$$v\,(b_0 + a_0\,v) = 0 \quad \ldots \quad (43).$$

Der Fall $v = 0$ führt auf das raumabbildende Knotenpunktsystem.

Wir wollen nun noch zeigen, daß $b_0 + a_0\,v = 0$ keine Lösung gibt, die unseren Forderungen genügt. Wir haben wegen (41)

$$v = -\frac{b_0}{a_0} = -\frac{2\,n'\,\xi'_0}{x_0} \quad \ldots \quad (44),$$

also bekommen wir für $\psi(v)$ (17):

$$\psi(v) = \frac{n}{2\,n'}\,(2\,n'^2 - 4\,n'^2\,\xi_0'^2) = n\,n'\left(1 - \frac{a_0\,v^2}{2\,n'^2}\right) \quad \ldots \quad (45).$$

Wir finden nun aus (17)

$$\left(1 - \frac{a_0\,v^2}{2\,n'^2}\right) = \frac{1 + \dfrac{b\,v}{2\,n'^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{v}{n'^2}\,(b + a\,v)}} \quad \ldots \quad (46).$$

Diese Gleichung führt aber nicht auf ein brennpunktloses System, da hierin für $a = b = 0$ v nicht verschwindet. Wir haben also

Satz 10. Wenn in einem brennpunktlosen kugelsymmetrischen System ein Punkt scharf abgebildet wird, so ist ein Knotenpunktsystem.

II. Teil.

Konzentrische Systeme.

§ 1. Die Durchrechnungsformeln.

Das einfachste Beispiel einer kugelsymmetrischen Abbildung geben die konzentrischen Systeme, bei denen sämtliche Trennungsflächen zweier Mittel Kugeln um den Systemmittelpunkt sind. Wir wollen im folgenden versuchen, die hier vorliegenden Gesetzmäßigkeiten in geschlossener Form abzuleiten.

Zunächst die Durchrechnungsformeln. Wegen der Kugelsymmetrie können wir uns auf die Betrachtung der Abbildung der Punkte einer Achse beschränken. Wir betrachten einen von einem Achsenpunkt ausgehenden Strahl. Da wir den Mittelpunkt als Koordinatenursprung ansehen, wollen wir alle Strecken, insbesondere auch die Radien, von ihm aus zählen; das bedingt, entgegen dem üblichen Brauch, daß die zum Gang der Lichtstrahlen konkaven Flächen einen positiven, die konvexen Flächen einen negativen Radius bekommen.

Wir wollen uns zunächst über die Bezeichnungen verständigen. Alle Größen, die sich auf die $\varkappa$-te Fläche beziehen, sollen den Zeiger $\varkappa$ erhalten, alle Größen, die sich auf den Zwischenraum zwischen $\varkappa$-ter und $(\varkappa+1)$-ter Fläche beziehen, den Zeiger $\varkappa+1$. Die Größen im Dingraum sollen den Zeiger Eins, die Größen im Bildraum den Zeiger $\nu+1$ erhalten. Mit $c_\varkappa$ bezeichnen wir die Entfernung eines Achsenpunktes vom Mittelpunkt, $\sigma_\varkappa$ sei der Winkel, den ein Strahl mit der Achse bildet, $\varepsilon_\varkappa(\varepsilon'_\varkappa)$ sei der Einfalls (Brechungs-) winkel, d. h. der Winkel, den ein Strahl vor (nach) der Brechung mit der Flächennormale am Einfallspunkt bildet. (Der Winkel ε erhält zweckmäßig hier auch das entgegengesetzte Vorzeichen, wie üblich.) Die Brechzahlen seien durch $(n_{\varkappa+1})$ gegeben.

Dann nehmen die üblichen Durchrechnungsformeln von G. S. Klügel die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varepsilon_\varkappa &= \frac{n_\varkappa c_\varkappa \sin\sigma_\varkappa}{n_\varkappa r_\varkappa} \\ \sin\varepsilon'_\varkappa &= \frac{n_\varkappa c_\varkappa \sin\sigma_\varkappa}{n_{\varkappa+1} r_\varkappa} \\ \sigma_{\varkappa+1} &= \sigma_\varkappa + \varepsilon'_\varkappa - \varepsilon_\varkappa \\ n_{\varkappa+1} c_{\varkappa+1} &= \frac{n_{\varkappa+1} r_\varkappa \sin\varepsilon'_\varkappa}{\sin\sigma_{\varkappa+1}} = \frac{n_\varkappa c_\varkappa \sin\sigma_\varkappa}{\sin\sigma_{\varkappa+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (1).$$

Da der Koordinatenanfang für alle Flächen im Mittelpunkt liegt, sind keine Übergangsformeln notwendig.

Gl. (1_4) zeigt, daß bei konzentrischer Abbildung gilt:

$$n_1 c_1 \sin\sigma_1 = n_\varkappa c_\varkappa \sin\sigma_\varkappa = n_{\nu+1} c_{\nu+1} \sin\sigma_{\nu+1} = u \quad \ldots \ldots (2).$$

Bezeichnen wir die in (2) dargestellte Invariante unseres Strahlengangs mit u. Sie ist übrigens geometrisch gleich der mit der Brechzahl multiplizierten Länge des vom Mittelpunkt auf den Strahl gefällten Lotes.

Wir finden ferner aus (1_3)

$$\sigma_{\nu+1} = \sigma_1 + \sum_1^\nu \varepsilon'_\varkappa - \sum_1^\nu \varepsilon_\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots (3).$$

Gl. (1_1) und (1_2) ergeben schließlich unter Benützung von (2)

$$\sin\varepsilon_\varkappa = \frac{1}{n_\varkappa r_\varkappa} u, \qquad \sin\varepsilon'_\varkappa = \frac{1}{n_{\varkappa+1} r_\varkappa} u \quad \ldots \ldots \ldots (4).$$

Ebenso können wir (2) nun formal schreiben

$$\sin\sigma_1 = \frac{1}{n_1 c_1} u, \qquad \sin\sigma_{\nu+1} = \frac{1}{n_{\nu+1} c_{\nu+1}} u \quad \ldots \ldots \ldots (5).$$

Gl. (5) lehrt uns, daß eine scharfe Abbildung eines Punktes ($c_1, c_{\nu+1}$ konstant) dann und nur dann möglich ist, wenn die abbildenden Strahlen die Sinusbedingung erfüllen. Für die Vergrößerung finden wir in diesem Falle

$$\beta' = \frac{n_1 \sin\sigma_1}{n_{\nu+1} \sin\sigma_{\nu+1}} = \frac{c_{\nu+1}}{c_1} \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

§ 2. Das grundlegende Lemma.

Wir wollen nun die Bedingungen dafür suchen, daß unser System einen Dingpunkt scharf abbildet. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst folgenden Hilfssatz.

Lemma: $C_1, C_2, \ldots C_{2n}$ mögen eine gerade Anzahl von Konstanten sein, die wir uns nach der absoluten Größe geordnet denken:

$$|C_1| \geqq |C_2| \geqq |C_3| \geqq \ldots \geqq C_{2n} \quad \ldots \ldots \ldots (7).$$

$f(u)$ sei eine ungerade Funktion ihres Arguments; dann kann eine Gleichung der Form

$$f(C_1 u) + f(C_2 u) + \ldots + f(C_n u) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

dann und nur dann bestehen, wenn gilt:

$$f(C_1 u) + f(C_2 u) = f(C_3 u) + f(C_4 u) = \ldots = f(C_{2n-1} u) + f(C_{2n} u) = 0 \quad \ldots (9).$$

Beweis: Gl. (8) stellt eine reguläre ungerade Funktion in u dar, die identisch verschwindet. Daraus folgt, daß sämtliche Koeffizienten ihrer Potenzreihe identisch verschwinden. Entwickeln wir nach u, so erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_{2n} = s_1 = 0 \\ C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 + \dots + C^3_{2n} = s_3 = 0 \\ C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + \dots + C^5_{2n} = s_5 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots (10).$$

Betrachten wir die Gleichung, deren Wurzeln $C_1, C_2, \dots C_{2n}$ sind, und entwickeln nach (x)

$$(x - C_1)(x - C_2) \dots\dots (x - C_{2n}) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots a_{2n} \quad \dots\dots (11).$$

Die Koeffizienten $a_\varkappa$ (die elementarsymmetrischen Funktionen der C) hängen mit den Potenzsummen der Wurzeln nach Newton (s. z. B. H. Weber: Lehrbuch der Algebra, S. 158) durch die Formeln

$$s_{\varkappa-1} + a_1 s_{\varkappa-2} + a_2 s_{\varkappa-3} + \dots + a_{\varkappa-1}(\varkappa - 1) = 0 \quad \dots\dots (12)$$

zusammen.

Aus dem Verschwinden der ungeraden Potenzsummen (10) folgt nun gemäß (12)

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n-1} = 0 \quad \dots\dots\dots (13),$$

d. h. (11) ist eine Gleichung für x^2, oder die C_i müssen paarweise entgegengesetzt gleich sein. Die durch (7) gekennzeichnete Numerierung der C_i nach der Größe verlangt nun

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = \dots C_{2n-1} + C_{2n} = 0 \quad \dots\dots\dots (14).$$

Da unsere Funktion f ungerade ist, folgt hieraus die gesuchte Formel (9).

Wir wenden jetzt unser Lemma an auf unsere Winkel:

Wir haben (Formel (3) bis (5))

$$\sigma_{\nu+1} = \sigma_1 + \sum_1^\nu \varepsilon'_\varkappa - \sum_1^\nu \varepsilon_\varkappa \quad \dots\dots\dots (15),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_\varkappa = \arcsin\left(\dfrac{1}{n_\varkappa r_\varkappa} u\right); & \sigma_1 = \arcsin\left(\dfrac{1}{n_1 c_1} u\right) \\ \varepsilon'_\varkappa = \arcsin\left(\dfrac{1}{n_{\varkappa+1} r_\varkappa} u\right); & \sigma_{\nu+1} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n_{\nu+1} c_{\nu+1}} u\right) \end{array}\right\} \quad \dots\dots (16).$$

Da arcsin eine ungerade Funktion seines Arguments ist, folgt aus unserem Lemma, daß Gl. (15) bei scharfer Abbildung ($c_{\nu+1}$ konstant) auf irgend eine Weise in $(\nu+1)$-Gleichungen zwischen je zwei der Größen zerfallen muß.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle, je nachdem, ob eine der sich ergebenden Gleichungen $\sigma_{\nu+1} = \sigma_1$ lautet oder nicht.

§ 3. Die raumabbildenden Systeme. Allgemeines.

Behandeln wir zunächst den ersten Fall. Es sei

$$\sigma_{\nu+1} = \sigma_1 \quad \dots\dots\dots\dots (17)$$

und die Gleichung

$$\sum_1^\nu \varepsilon_\varkappa - \sum_1^\nu \varepsilon'_\varkappa = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (18)$$

zerfalle in ν Einzelgleichungen. Dann behaupten wir zunächst, das abbildende System ist ein Knotenpunktsystem, das den ganzen Raum scharf mit der Vergrößerung $n : n'$ abbildet.

Das erkennt man, wie folgt: Die ν Gleichungen, in die (18) zerfällt, geben uns, wegen (16), Beziehungen zwischen den Radien, also Gleichungen, die vom einmal gewählten Strahlengang unabhängig sind.

Betrachten wir einen beliebigen anderen Achsenpunkt und die ihn abbildenden Strahlen, so folgt aus der gefundenen Beziehung zwischen den Radien für die neuen Brechungswinkel $\bar{\varepsilon}_\varkappa, \bar{\varepsilon}'_\varkappa$ die (18) entsprechende Gleichung

$$\sum \bar{\varepsilon}'_\varkappa - \sum \bar{\varepsilon}_\varkappa = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (19);$$

hieraus findet man wieder, unter Beachtung der bedingungslos gültigen Gl. (15), daß auch im neuen Strahlengang

$$\bar{\sigma}_{\nu+1} = \bar{\sigma}_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

ist, also Ding- und Bildstrahl parallel austreten. Aus (20) und (16) folgt nun hinwiederum

$$n_{\nu+1}\, \bar{c}_{\nu+1} = n_1\, \bar{c}_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

d. h. der Achsenpunkt wird scharf abgebildet; die zugehörige Gaußische Vergrößerung ergibt sich aus (6) zu

$$\beta' = \frac{\bar{c}_{\nu+1}}{\bar{c}_1} = \frac{n_1}{n_{\nu+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Das abbildende System ist brennpunktlos mit der Fernrohrvergrößerung Eins, und raumabbildend, also ein Knotenpunktsystem.

Wir wollen jetzt die Einschränkung untersuchen, die durch die räumliche Gestaltung bedingt wird. Zuerst machen wir noch auf folgendes aufmerksam. Jede Identität zwischen den $\varepsilon_\varkappa$ und ε'_λ gibt nach (16) eine Identität zwischen den $n_\varkappa\, r_\varkappa$ und $n_{\lambda+1}\, r_\lambda$ und umgekehrt. Beispiel:

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_\varkappa = \varepsilon'_\mu & \text{entspricht} & n_\varkappa\, r_\varkappa = n_{\mu+1}\, r_\mu \\ \varepsilon_\varkappa = -\varepsilon_\lambda & \text{entspricht} & n_\varkappa\, r_\varkappa = -n_\lambda\, r_\lambda \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (evtl. durch Vertauschung von σ mit $-\sigma$) kann man u als negativ ansehen, d. h. man kann erreichen, daß die ε das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie die entsprechenden Radien.

Aus geometrischen Gründen muß nun immer gelten

$$r_1 < r_2 < \ldots\ldots < r_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Daraus folgt, bei Beachtung von (16), daß für die ε die Ungleichungen

$$\varepsilon'_\varkappa < \varepsilon_{\varkappa+1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

für jedes $\varkappa$ gelten. Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden:

a) alle Radien sind negativ: $r_1 < r_2 < \ldots < r_\nu < 0$,

b) ein Teil der Radien ist positiv: $r_1 < r_2 < \ldots < r_\varkappa < 0, \quad 0 < r_{\varkappa+1} < r_{\varkappa+2} < \ldots < r_\nu$,

c) alle Radien sind positiv: $0 < r_1 < r_2 < \ldots\ldots < r_\nu$.

§ 4. Alle Radien sind negativ.

a) Wir behandeln zunächst den ersten Fall. Hier haben bei unserer Wahl von u alle ε und ε' positive Werte; wir schreiben Gl. (18) so, daß auf jeder Seite nur positive Größen stehen; dann nimmt sie die Gestalt an:

$$\sum_1^\nu{}' \varepsilon_\varkappa = \sum_1^\nu{}' \varepsilon'_\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

Jede Größe der rechten Seite ist dann gleich einer der Größen der linken Seite und umgekehrt.

Daraus folgt z. B., daß in diesem Fall gilt (Π Produktzeichen):

$$\prod_1^\nu \sin \varepsilon_\varkappa = \prod_1^\nu \sin \varepsilon'_\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27),$$

oder wegen (4)

$$\prod_1^\nu n_\varkappa\, r_\varkappa = \prod_1^\nu n_{\varkappa+1}\, r_\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Kürzen wir (28), so erhalten wir die wichtige Gleichung

$$n_1 = n_{\nu+1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29),$$

d. h. unser raumabbildendes System mit durchweg negativen Radien ändert den Strahlengang überhaupt nicht; der Maßstab der Abbildung ist Eins.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Bedingung aus den Ungleichungen (25) für den Zerfall unserer Gl. (26) sich ergeben.

Es sei ein reelles raumabbildendes System gegeben. Wir ordnen die zugehörigen Gleichungen in folgender Weise. ε_1 ist gleich einem ε'_λ; $\varepsilon_{\lambda+1}$ ist gleich einem ε'_μ; $\varepsilon'_{\mu+1}$ ist gleich einem ε'_{λ_3} und so fort. Da wir nur eine endliche Anzahl von ε haben, kommen wir so schließlich zu einem ε, das gleich ε'_ν ist:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_\lambda, \qquad \varepsilon_{\lambda+1} = \varepsilon'_\mu \ldots\ldots\ldots \varepsilon_\tau = \varepsilon_\nu, \qquad \varepsilon_{\lambda_{\nu-1}+1} = \varepsilon'_\nu \quad \ldots \quad (30).$$

Wir behaupten: Diese Reihenfolge ist eine Reihenfolge nach der Größe, und sie erschöpft alle Gleichungen.

Das erste erkennt man sofort aus Formel (25), das zweite folgt so. Wären unsere ε durch das angegebene Verfahren nicht erschöpft, so könnten die übrigen auch der Größe nach geordnet werden. Unter ihnen müßte es ein Kleinstes geben. Es sei $\varepsilon_\varkappa$. Dann wissen wir aber, daß $\varepsilon'_{\varkappa-1}$ kleiner ist. Diese Größe kann aber nach Konstruktion unter unseren Gl. (30) nicht vorkommen, ohne eine Gleichung für $\varepsilon_\varkappa$ nach sich zu ziehen. Ihm entspricht ein $\varepsilon_\mu < \varepsilon_\varkappa$, gegen unsere Voraussetzung.

Eine weitere Forderung, die wir an unsere Gleichungen stellen müssen, ist, daß nirgends

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon'_\lambda \quad \ldots \quad (31)$$

sein darf. Das zöge nämlich nach sich

$$n_\lambda = n_{\lambda+1} \quad \ldots \quad (32),$$

d. h. die Fläche wäre optisch wirkungslos.

Unsere Regel können wir folgendermaßen aussprechen: Die Gl. (30) sind gegeben, wenn die Zeiger auf der rechten Seite folgenden Bedingungen genügen: der erste Zeiger darf nicht Eins sein, der letzte muß $\nu + 1$ sein, außerdem dürfen bei unserer Anordnung nicht zwei Zeiger in natürlicher Reihenfolge aufeinander folgen ($\lambda_{\varkappa+1} \neq \lambda_\varkappa + 1$).

Wir können symbolisch also jedem optischen System eine Folge von Zahlen zuordnen, die wir durch eine geschweifte Klammer bezeichnen wollen. Für fünf Flächen ergeben sich z. B. folgende acht Möglichkeiten, die hier lexikographisch angeordnet sind:

$$\left.\begin{array}{lll} \{21435\} & \{31425\} & \{42135\} \\ \{24135\} & \{32415\} & \{43215\} \\ \{24315\} & \{41325\} & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (33).$$

Das erste Symbol steht z. B. für die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lcl} \varepsilon_1 = \varepsilon'_2 & & n_1 r_1 = n_3 r_2 \\ \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 & & n_3 r_3 = n_2 r_1 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon'_4 & \text{oder} & n_2 r_2 = n_5 r_4 \\ \varepsilon_5 = \varepsilon'_3 & & n_5 r_5 = n_4 r_3 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon'_5 & & n_4 r_4 = n_6 r_5 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (34).$$

Man kann und muß nun die Rückfrage stellen: Entspricht jedem derartigen Symbol ein optisch realisierbares System, und wenn ja, wieviel Freiheitsgrade hat das System, d. h. wieviel Größen können wir willkürlich wählen.

Jedes Symbol gibt nach unserem Verfahren ν Gleichungen zwischen den ε und daher auch ν homogene lineare Gleichungen zwischen den mit den jeweiligen Brechzahlen multiplizierten Radien. Die Frage, die sich erhebt, lautet nun: Kann man die $(\nu + 1)$ Brechzahlen so wählen, daß neben den ν Gleichungen auch noch die $(\nu + 1)$ Ungleichungen (24) erfüllt werden? Eine Einschränkung haben wir schon kennengelernt: es muß stets $n_1 = n_{\nu+1}$ sein; es fragt sich, ob wir den Brechzahlen noch weitere Bedingungen auferlegen müssen.

Die Ausführung der Diskussion im obigen Fall würde als notwendig und hinreichend uns die Erfüllung der Forderungen (man beachte, daß alle r negativ sind)

$$n_1 = n_6, \qquad n_2 < n_1 < n_3, \qquad n_4 < n_1 < n_5 \quad \ldots \quad (34)$$

lehren. Ähnliche Ungleichungen wird man in jedem Fall gesondert aufstellen müssen. Für die optische Praxis höchst bedauerlich ist, daß die Ding- und Bildraum gemeinsame Brechzahl weder ein Maximum noch ein Minimum sein kann, bedauerlich deshalb, weil das erste und letzte Mittel nicht Luft sein kann.

Daß dies allgemein gilt, erkennt man wie folgt: ε_1 muß gleich einem ε' sein, z. B. $\varepsilon_1 = \varepsilon'_\lambda$, das gibt

$$n_1 r_1 = n_{\lambda+1} r_\lambda \quad \ldots \ldots \quad (35),$$

aus $r_1 < r_\lambda < 0$ folgt nun

$$n_1 < n_{\lambda+1} \quad \ldots \ldots \quad (36).$$

Ebenso folgt aus $\varepsilon_\tau = \varepsilon'_\nu$, $n_\tau r_\tau = n_{\nu+1} r_\nu$, also wegen

$$r_\tau < r_\nu, \qquad n_\tau < n_{\nu+1} \quad \ldots \ldots \quad (37),$$

was zu beweisen war.

Wir wollen nun zum Schluß noch untersuchen, ob außer den (34) entsprechenden Ungleichungen noch Gleichungen zwischen den Brechzahlen vorkommen; das führt auf eine andere symbolische Darstellungsart unserer Hauptgleichungen.

Betrachten wir nur die Zeiger rechts und links, so können wir in (34) z. B. lesen: 1 geht in 2 über, 2 in 4, 4 in 5, 5 in 3, 3 in 1 und können symbolisch dafür schreiben

$$[1, 2, 4, 5, 3] \quad \ldots \ldots \quad (38).$$

In unserem Fall sind wir erst wieder zur Eins zurückgekehrt, nachdem wir alle Zahlen durchlaufen haben; es hätte aber auch sein können, daß der Zyklus sich früher geschlossen hätte. Wir geben auch dafür ein Beispiel. Betrachten wir das aus 6 Flächen bestehende System, das symbolisch durch {2, 1, 5, 4, 3, 6}, also durch die Gleichungen

$$\begin{array}{llcll} \varepsilon_1 = \varepsilon'_2 & \varepsilon_6 = \varepsilon'_4 & & n_1 r_1 = n_3 r_2 & n_6 r_6 = n_5 r_4 \\ \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 & \varepsilon_5 = \varepsilon'_3 & \text{oder} & n_3 r_3 = n_2 r_1 & n_5 r_5 = n_4 r_3 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon'_5 & \varepsilon_4 = \varepsilon'_6 & & n_2 r_2 = n_6 r_5 & n_4 r_4 = n_7 r_6 \end{array} \Bigg\} \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

gegeben wird, so erhält man in der Zykelschreibweise dafür als Symbol [1 2 5 3] [4 6].

Wir sehen: zwischen den Radien der in den Zykeln eingeführten Flächen bestehen Beziehungen. Eliminieren wir die Radien, so erhalten wir ebensoviel Gleichungen zwischen den $n_\varkappa$, als Zykeln vorhanden sind. Man kann allgemein aussprechen:

Satz: Das Produkt der relativen Brechkräfte aus dem in einem Zyklus vorkommenden Flächen ist gleich Eins.

Für unseren Sonderfall gilt das insbesondere:

$$\frac{n_1 n_2 n_3 n_5}{n_2 n_3 n_4 n_6} = \frac{n_1 n_5}{n_4 n_6} = 1, \qquad \frac{n_4 n_6}{n_5 n_7} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (40).$$

Durch Multiplizieren beider Gleichungen ergibt sich, wie es ja sein muß, unsere altbekannte Gl. (29).

§ 4. Die Radien haben verschiedenes Vorzeichen.

Wir wollen jetzt raumabbildende Systeme untersuchen, bei denen die Radien verschiedene Vorzeichen haben. $r_1, r_2 \ldots r_\varkappa$ seien negativ, $r_{\varkappa+1}, r_{\varkappa+2}, \ldots r_\nu$ seien positiv. Bei unserer Wahl von n sind dann die ersten $\varkappa$-Werte von ε, ε' positiv, die letzten $\nu - \varkappa$ negativ. Schreiben wir unsere zerfallende Gl. (18) so, daß alle Größen positiv werden, so ergibt das

$$\sum_1^\varkappa \varepsilon_\varrho + \sum_{\varkappa+1}^\nu (-\varepsilon'_\varrho) = \sum_1^\varkappa \varepsilon'_\varrho + \sum_{\varkappa+1}^\nu (-\varepsilon_\varrho) \quad \ldots \ldots \quad (41).$$

Jede Größe auf der rechten Seite ist gleich einer Größe auf der linken Seite. Das gibt zunächst eine wichtige Beziehung zwischen den Brechkräften. Aus obigem Satz folgt natürlich

$$1 = \frac{\sin \varepsilon_1 \ldots \ldots \sin \varepsilon_\varkappa \; \sin \varepsilon'_{\varkappa+1} \ldots \ldots \sin \varepsilon'_\nu}{\sin \varepsilon'_1 \ldots \ldots \sin \varepsilon'_\varkappa \; \sin \varepsilon_{\varkappa+1} \ldots \ldots \sin \varepsilon_\nu} = \frac{n_2}{n_1} \ldots \ldots \frac{n_{\varkappa+1}}{n_\varkappa} \frac{n_{\varkappa+1}}{n_{\varkappa+2}} \ldots \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} = \frac{n^2_{\varkappa+1}}{n_1 n_{\nu+1}},$$

also

$$n_1 n_{\nu+1} = n^2_{\varkappa+1} \quad \ldots \ldots \quad (42).$$

Satz: In einem raumabbildenden System ist die Brechzahl des Mittels, das den Systemmittelpunkt enthält, die mittlere Proportionale zwischen den beiden Außenmitteln.

Wir wollen jetzt sehen, welche Ungleichungen wir zwischen unseren Größen (41) aufstellen können. (25) gibt:

$$\varepsilon'_1 < \varepsilon_2, \varepsilon'_2 < \varepsilon_3, \ldots \varepsilon'_{\varkappa-1} < \varepsilon_\varkappa; \quad -\varepsilon_\nu < -\varepsilon'_{\nu-1}, -\varepsilon_{\nu-1} < -\varepsilon'_{\nu-2}, \ldots -\varepsilon_{\varkappa+2} < -\varepsilon'_{\varkappa+1} \quad . \quad (43).$$

Wir bekommen diesmal nur $\nu - 1$ Ungleichungen. Versuchen wir, ebenso wie in § 3, unseren Gleichungen eine Art Rangordnung zu geben, so gibt es zwei Größen links, über deren Vorgänger wir nichts aussagen können, nämlich ε_1 und $-\varepsilon'_\nu$, und zwei Größen rechts, über deren Nachfolger wir nichts wissen, nämlich $\varepsilon'_\varkappa$ und $-\varepsilon_{\varkappa+1}$.

Dementsprechend können wir nun ein Verfahren angeben, das bei gegebenem System unsere Winkel in zwei Gruppen nach der Größe ordnet, über dessen gegenseitige Größenbeziehungen wir aber nichts aussagen können.

Verfahren wir wie folgt: Wir beginnen bei ε_1; das ist gleich einem der $\varepsilon'_\varrho (\varrho \leqq \varkappa)$ oder gleich einem $-\varepsilon_\varrho (\varrho \geqq \varkappa + 1)$. Im ersten Fall hat die nächste Gleichung auf der linken Seite $\varepsilon_{\varrho+1}$, im zweiten Fall $-\varepsilon'_{\varrho-1}$. Wir setzen das Verfahren fort, bis wir auf der rechten Seite entweder zu $\varepsilon'_\varkappa$ oder zu $-\varepsilon_{\varkappa+1}$ kommen. Dann ist der erste Abschnitt zu Ende. Der zweite Abschnitt beginnt mit $-\varepsilon'_\nu$ links und endet mit $\varepsilon'_\varkappa$ oder $-\varepsilon_{\varkappa+1}$ rechts.

Wieder können wir jedes System symbolisch durch die Indizes der Größen auf der rechten Seite darstellen. Das Symbol enthalte eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots \varkappa, -(\varkappa+1) \ldots (-n)$, die folgenden Bedingungen genügt. Zerlegen wir die Zahlenfolge in zwei Abschnitte, von denen einer durch $\varkappa$, der andere durch $(-(\varkappa+1))$ begrenzt wird; dann müssen die beiden Abschnitte alle Zahlen enthalten, der erste darf nicht mit 1, der zweite nicht mit $-\nu$ beginnen; in jedem Abschnitt ist es verboten, daß zwei Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge $(\varrho, \varrho+1)$ oder $-\varrho, -(\varrho-1)$ aufeinander folgen.

Beispiel: Das Symbol $\{2, -4 | 1, -5, 3\}$ führt auf das System

$$\left.\begin{array}{llcll} \varepsilon_1 = \varepsilon'_2, & -\varepsilon'_5 = \varepsilon'_1 & & n_1 r_1 = n_3 r_2 & -n_6 r_5 = n_2 r_1 \\ \varepsilon_3 = -\varepsilon_4, & \varepsilon_2 = -\varepsilon_5 & \text{oder} & n_3 r_3 = -n_4 r_4 & n_2 r_2 = -n_5 r_5. \\ & -\varepsilon'_4 = \varepsilon'_3 & & & -n_5 r_4 = n_4 r_3 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (44).$$

Wir wollen auch hier wieder einen Fall vollständig durchführen. Betrachten wir die Systeme mit vier Flächen, bei denen zwei negativ, zwei positiv sind, so bekommen wir als symbolische Darstellungen

$$\{-3 | 1, -4, 2\} \qquad \{-4, 1, -3 | 2\} \qquad \{-4, 2 | 1, -3\} \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

Der Strich soll andeuten, daß hier der erste Abschnitt zu Ende ist und ein neuer Abschnitt beginnt. Jedes derartige System von Zahlen, das obigen Forderungen genügt, führt wie in (34) auf ein System von ν linearen homogenen Gleichungen für die ν Radien. Die $\nu + 1$ Brechzahlen müssen dann noch so gewählt sein, daß auch die $\nu - 1$ Ungleichungen (43) noch befriedigt werden.

Statt auf die obige Weise können wir unsere Gleichungen auch durch Zykeln schreiben, das gibt für unsere drei Systeme (45) die Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l} \{-3 | 1, -4, 2\} = [1, -3, 2, -4] \\ \{-4, 1, -3 | 2\} = [1, -4, 2, -3] \\ \{-4, 2 | 1, -3\} = [1, -4] [2, -3] \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (46).$$

Wir sehen, daß nur das letzte System in Zykeln zerfällt.

Es gibt ebensoviel Gleichungen zwischen den Brechzahlen, als Zykeln im System sind. Es gilt der sofort zu beweisende

Satz: Das Produkt der relativen Brechzahlen an den positiven Flächen eines Zyklus ist gleich dem Produkt der Brechzahlen an den negativen Flächen. In (46_3) gilt also

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_4}{n_5}, \qquad \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_3}{n_4} \quad \ldots \ldots \quad (47).$$

Außer den Gleichungen zwischen den Brechzahlen wird es für diese in jedem einzelnen Fall auch noch Ungleichungen geben, die sich aus den Beziehungen (43) ergeben. Für das durch (46_1) gegebene System von zwei positiven und zwei negativen Flächen finden wir z. B.

$$n_4 < n_5, \qquad n_3 < n_2, \qquad n_1 n_5 = n_3^2 \quad \ldots \ldots \quad (48).$$

Wir können hier, ebenso wie im vorigen Paragraphen, übrigens wieder schließen, daß es kein raumabbildendes System gibt, wo in Ding- und Bildraum sich Luft befindet. Aus Gl. (42) würde sich ergeben, daß auch das Mittel, in dem der Systemmittelpunkt liegt, aus Luft bestünde. Durch Untersuchung der Möglichkeiten für die Winkel $\varepsilon_1, \varepsilon'_\varkappa, -\varepsilon_{\varkappa+1}, -\varepsilon'_\nu$ würde sich dann für ein Zwischenmittel eine niedrigere Brechzahl ergeben.

Wir werden im folgenden eine Zusammenstellung aller raumabbildenden Systeme bis zu vier Flächen geben. In der ersten Spalte der Tafel stehen die Symbole, die zum Auffinden der Systeme dienen, in der zweiten Spalte stehen die Symbole, die die Zerlegung in Zykeln kennzeichnen. Die dritte Spalte enthält die Beziehungen zwischen den Radien.

In der vierten Spalte stehen die aus Gl. (43) folgenden Beziehungen zwischen den Brechzahlen, die sich aus dem evtl. Zerfall in Zykeln ergebenden weiteren Beziehungen findet man in der fünften Spalte.

Historisch sei noch auf folgendes aufmerksam gemacht:

Das in unserer Darstellung als erstes angeführte System findet sich in einer Arbeit von Max Lange aus dem Jahr 1919 (Centralzeitung f. Optik u. Mechanik 40, S. 248).

Max Lange weiß, daß dieses System eine vollständig scharfe Abbildung der unendlich fernen Ebene gibt; er hat aber nicht erkannt, daß durch sein System der ganze Bildraum scharf abgebildet wird.

Es braucht nicht hinzugefügt zu werden, daß die Behandlung der Systeme mit nur positiven Radien in genau derselben Weise vor sich geht, wie die Behandlung der Systeme mit nur negativen Radien.

§ 5. Die zweikugelabbildenden Systeme.

Wir wissen, daß in diesem Fall die Gleichung

$$\sigma_{\nu+1} = \sigma_1 + \sum_1^{\nu} \varepsilon'_\varkappa - \sum_1^{\nu} \varepsilon_\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

in $(\nu+1)$ Gleichungen zerfallen muß, unter denen nicht $\sigma_{\nu+1} = \sigma_1$ vorkommen soll. Wir ordnen wieder nach dem Vorzeichen. Unter den Radien mögen die ersten $\varkappa$ negativ, die letzten $n - \varkappa$ positiv sein, dann sind bei unserer Wahl von u die ersten $\varkappa$ Werte ε und ε' positiv, die letzten $n - \varkappa$ Werte negativ. Wir bekommen $\nu - 1$ Gleichungen zwischen den ε und ε'; ferner noch zwei Gleichungen: σ_1 ist gleich einem ε oder einem $-\varepsilon'$; $\sigma_{\nu+1}$ gleich einem ε' oder einem $-\varepsilon$.

Ein Beispiel für drei Flächen möge folgen:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon'_3, \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon'_1, \qquad \sigma_1 = \varepsilon_1, \qquad \sigma_4 = \varepsilon'_2 \quad \ldots \ldots \quad (50).$$

Man erkennt sofort, daß dasselbe optische System auch für

$$\sigma_1 = -\varepsilon'_2, \qquad \sigma_4 = -\varepsilon_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

eine scharfe Abbildung gibt. Das Entsprechende gilt überall.

Wir wollen einmal

$$\sigma_1 = \varepsilon'_0, \qquad \sigma_{\nu+1} = \varepsilon_0, \qquad \text{das andere Mal} \qquad \sigma_1 = -\varepsilon_0, \qquad \sigma_{\nu+1} = -\varepsilon'_0 \quad . \quad (52)$$

einführen. Dann schreibt sich unsere Gl. (49), wenn wir wieder nach dem Vorzeichen ordnen,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{entweder} & \sum\limits_0^{\varkappa} \varepsilon_\varrho + \sum\limits_{\varkappa+1}^{\nu} (-\varepsilon'_\varrho) = \sum\limits_0^{\varkappa} \varepsilon'_\varrho + \sum\limits_{\varkappa+1}^{\nu} (-\varepsilon_\varrho), \\ \text{oder} & \sum\limits_1^{\varkappa} \varepsilon_\varrho + \sum\limits_{\varkappa+1}^{\nu} (-\varepsilon'_\varrho) - \varepsilon'_0 = \sum\limits_1^{\varkappa} \varepsilon'_\varrho + \sum\limits_{\varkappa+1}^{\nu} (-\varepsilon_\varrho) - \varepsilon_0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (53),$$

und beide Gleichungen führen auf dasselbe optische System; sie zerfallen in je $(\nu+1)$ Gleichungen; jedes Glied der rechten Seite ist gleich einem Glied der linken Seite.

Wir wollen nun die Vergrößerungen berechnen, mit der die beiden Dingpunkte und damit die beiden konzentrischen Kugelschalen (vgl. Teil I, § 3b) abgebildet werden.

Wir finden nach Gl. (6)

$$1 = \frac{\sin\varepsilon_0}{\sin\varepsilon'_0} \frac{\sin\varepsilon_1 \ldots \sin\varepsilon_\varkappa \sin\varepsilon'_{\varkappa+1} \ldots \sin\varepsilon'_\nu}{\sin\varepsilon'_1 \ldots \sin\varepsilon'_\varkappa \sin\varepsilon_{\varkappa+1} \ldots \sin\varepsilon_\nu} = \frac{n_1}{n_{\nu+1}\beta'_1} \frac{n^2_{\varkappa+1}}{n_1 n_{\nu+1}} \text{ und } 1 = \frac{n_{\nu+1}\beta'_2}{n_1} \frac{n^2_{\varkappa+1}}{n_1 n_{\nu+1}} \quad (54).$$

Die Vergrößerungen ergeben sich also zu

$$\beta'_1 = \frac{n^2_{\varkappa+1}}{n^2_{\nu+1}}, \qquad \beta'_2 = \frac{n_1^2}{n^2_{\varkappa+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54a).$$

Sind insbesondere alle Radien negativ (oder positiv), so ergibt sich

$$\beta'_1 = 1, \qquad \beta'_2 = \frac{n_1^2}{n^2_{\nu+1}}, \qquad \text{oder} \qquad \beta'_1 = \frac{n_1^2}{n^2_{\nu+1}}, \qquad \beta'_2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (55).$$

Da der zweite Fall (52) stets auf den ersten zurückgeführt werden kann, brauchen wir uns allein mit diesem zu beschäftigen. Wir können ohne weiteres wieder jedem abbildenden System ein geschweiftes Klammersymbol zuordnen. Wir brauchen bloß zu betrachten, daß auch über ε_0 und ε'_0 nichts ausgesagt ist in bezug auf die Größenordnung; wir bekommen also hier drei Abschnitte.

Wir können unsere Gleichungen eindeutig wie folgt ordnen: Wir beginnen mit ε_1, das ist gleich einem der ε'_λ oder gleich einem $-\varepsilon_\lambda$. Im ersten Fall beginnt die zweite Gleichung mit $\varepsilon_{\lambda+1}$, im anderen Fall dagegen mit $-\varepsilon'_{\lambda-1}$. Das setzen wir so lange fort, bis auf der rechten Seite einmal $\varepsilon'_\varkappa$ steht, oder $-\varepsilon_{\varkappa+1}$ oder ε'_0. Dann beginnt der zweite Abschnitt mit $-\varepsilon'_\nu$; er endet wieder damit, daß auf der rechten Seite eine der drei Endgrößen steht; dann beginnen wir mit ε_0 und hören damit auf, daß die übrigbleibende der drei obigen Größen am Schluß rechts steht. Wie oben können wir beweisen, daß die so entstehenden drei Abschnitte alle $\nu+1$ Gleichungen erschöpfen.

Wir könnon wieder unser System dadurch kennzeichnen, daß wir die Zeiger auf der rechten Seite mit dem zugehörigen Vorzeichen in eine geschweifte Klammer schreiben; wir bekommen umgekehrt alle Symbole, wenn wir die Zahlen $0, 1, \ldots \varkappa, -(\varkappa+1) \ldots -\nu$ in irgend einer Reihenfolge so schreiben, daß folgenden Bedingungen genügt wird:

Am Schluß soll eine der drei Zahlen $\varkappa, -(\varkappa+1)$ oder 0 stehen. Die beiden andern Zahlen teilen unsere Folge in drei Abschnitte. Der erste Abschnitt darf nicht mit Eins beginnen, der zweite nicht mit $(-\nu)$, der dritte Abschnitt darf nicht mit Null anfangen; in keinem Abschnitt dürfen zwei Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge aufeinanderfolgen.

Beispiel: System mit drei Flächen, von denen zwei negativ sind, eine positiv:

$$\left.\begin{array}{ll} \{0 \mid 1, -3 \mid 2\} & \{\ \ 2 \mid 1, 0 \mid -3\} \\ \{0 \mid 2 \mid 1, -3\} & \{-3 \mid 1, 0 \mid \ \ 2\} \\ \{2 \mid 0 \mid 1, -3\} & \{-3 \mid \ \ 2 \mid 1, 0\} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56).$$

Beispielsweise sind die Gleichungen im ersten und zweiten Fall:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = \varepsilon'_0 & \varepsilon_1 = \varepsilon'_0 \\ -\varepsilon'_3 = \varepsilon'_1 & -\varepsilon'_3 = \varepsilon'_2 \\ \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 & \varepsilon_0 = \varepsilon'_1 \\ \varepsilon_0 = \varepsilon'_2 & \varepsilon_2 = -\varepsilon_3\,. \end{array}$$

Auch hier wieder kann man die Systeme zyklisch schreiben, doch haben wir auch hier kein Mittel gefunden, um bei zyklischer Schreibweise zu erkennen, ob man zu einem möglichen System kommt oder nicht. Die Zykelschreibweise gibt aber Gelegenheit zu erkennen, ob noch eine Beziehung zwischen den Brechzahlen besteht oder nicht. Die obigen Systeme schreiben sich zyklisch:

$$\left.\begin{array}{ll} [2, -3, 1, 0] & [-3, 1, 2, 0] \\ [2, -3]\ [1, 0] & [1, -3]\ [2, 0] \\ [1, 2, -3, 0] & [1, -3, 2, 0] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

Fragen wir wieder, ob Ding- und Bildraum Luft sein kann, so ist diese Frage, wie eine leichte Betrachtung ergibt, zu verneinen, wenn alle Systemradien gleiches Vorzeichen haben; im anderen Fall ist sie zu bejahen. Im ersten Fall zeigt sich nämlich, daß dann $\beta'_1 = \beta'_2$ wird, das System ist brennpunktlos, und daher nach unseren allgemeinen Sätzen raumscharf; unsere Frage ist also auf die schon früher erledigte zurückzuführen. Im anderen Fall allerdings ist es nicht gestattet, auch für das $\varkappa+1$te Mittel Luft zu wählen, das den Mittelpunkt enthält.

Raumscharfe Abbildung.

{ }	[ ]	Beziehungen zwischen den Radien	Beziehungen zwischen den Brechzahlen	
		Zwei Flächen		
		$1\overset{1}{(}\;\overset{2}{(}3$		
—	—	—	—	—
		$1\overset{1}{(}\,2\,\overset{2}{)}3$		
$\{-2 \mid 1\}$	$[1\ -2]$	$n_1 r_1 = -n_2 r_2$; $n_3 r_2 = -n_2 r_1$	$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_2}{n_3}$	—
		$1\overset{1}{)}\,2\,\overset{2}{)}3$		
—	—	—	—	—
		Drei Flächen		
		$1\overset{1}{(}\;\overset{2}{(}\;\overset{3}{(}4$		
$\{2\ 1\ 3\}$	$[1\ 2\ 3]$	$n_1 r_1 = n_3 r_2$ $n_2 r_2 = n_4 r_3$ $n_3 r_3 = n_2 r_1$	$\frac{n_1}{n_4} = 1$	$n_2 < n_1 < n_3$
		$1\overset{1}{(}\;\overset{2}{(}\,3\,\overset{3}{)}4$		
$\{2 \mid 1\ -3\}$	$[1\ 2\ -3]$	$n_1 r_1 = n_3 r_2$ $n_2 r_2 = -n_3 r_3$ $n_4 r_3 = -n_2 r_1$	$\frac{n_1}{n_3} = \frac{n_3}{n_4}$	$n_1 < n_3 < n_4$
		$1\overset{1}{(}\,2\,\overset{2}{)}\;\overset{3}{)}4$		
$\{-3\ 1 \mid -2\}$	$[1\ -3\ -2]$	$n_1 r_1 = -n_3 r_3$ $n_4 r_3 = n_2 r_2$ $n_3 r_2 = -n_2 r_1$	$\frac{n_1}{n_3} = \frac{n_2}{n_4}$	$n_1 > n_2 > n_4$
		$1\overset{1}{)}\;\overset{2}{)}\;\overset{3}{)}4$		
$\{-2\ -3\ -1\}$	$[-3\ -2\ -1]$	$n_4 r_3 = n_2 r_2$ $n_3 r_2 = n_1 r_1$ $n_2 r_1 = n_3 r_3$	$\frac{n_1}{n_4} = 1$	$n_3 < n_1 < n_2$

Raumscharfe Abbildung (Fortsetzung).

{ }	[ ]	Beziehungen zwischen den Radien	Gleichungen zwischen den Brechzahlen[6]	
		Vier Flächen		
		$1\overset{1}{(}\ \overset{2}{(}\ \overset{3}{(}\ \overset{4}{(}5$		
{3 2 1 4}	[1 3] [2 4]	$n_1 r_1 = n_4 r_3;\ n_3 r_3 = n_2 r_1 \mid n_2 r_2 = n_5 r_4;\ n_4 r_4 = n_3 r_2$	$\frac{n_1}{n_5} = 1$	$\frac{n_1 n_3}{n_2 n_4} = 1;\ \frac{n_2 n_4}{n_3 n_5} = 1$
		$1\overset{1}{(}\ \overset{2}{(}\ \overset{3}{(}\ 4\ \overset{4}{)}5$		
{2 1 −4 $\mid$ 3}	[1 2 −4 3]	$n_1 r_1 = n_3 r_2;\ n_2 r_2 = -n_4 r_4 :\ n_5 r_4 = -n_4 r_3;\ n_3 r_3 = n_2 r_1$		—
{2 −4 $\mid$ 1 3}	[1 2 3 −4]	$n_1 r_1 = n_3 r_2;\ n_2 r_2 = n_4 r_3 ;\ n_3 r_3 = -n_4 r_4;\ n_5 r_4 = -n_2 r_1$	$\frac{n_1}{n_4} = \frac{n_4}{n_5}$	—
{3 $\mid$ 2 1 −4}	[1 3] [2 −4]	$n_1 r_1 = n_4 r_3;\ n_3 r_3 = n_2 r_1 \mid n_2 r_2 = -n_4 r_4;\ n_5 r_4 = -n_3 r_2$		$\frac{n_1 n_3}{n_2 n_4} = 1;\ \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_4}{n_5}$
{−4 $\mid$ 2 1 3}	[1 −4 2 3]	$n_1 r_1 = -n_4 r_4;\ n_5 r_4 = -n_3 r_2 ;\ n_2 r_2 = n_4 r_3;\ n_3 r_3 = n_2 r_1$		—
		$1\overset{1}{(}\ \overset{2}{(}\ 3\ \overset{3}{)}\ \overset{4}{)}5$		
{−3 $\mid$ 1 −4 2}	[1 −3 2 −4]	$n_1 r_1 = -n_3 r_3;\ n_4 r_3 = -n_3 r_2 :\ n_2 r_2 = -n_4 r_4;\ n_5 r_4 = -n_2 r_1$		—
{−4 1 −3 $\mid$ 2}	[1 −4 2 −3]	$n_1 r_1 = -n_4 r_4;\ n_5 r_4 = -n_3 r_2 :\ n_2 r_2 = -n_3 r_3;\ n_4 r_3 = -n_2 r_1$	$\frac{n_1}{n_3} = \frac{n_3}{n_5}$	—
{−4 2 $\mid$ 1 −3}	[1 −4] [2 −3]	$n_1 r_1 = -n_4 r_4;\ n_5 r_4 = -n_2 r_1 \mid n_2 r_2 = -n_3 r_3;\ n_4 r_3 = -n_3 r_2$		$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_4}{n_5};\ \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_3}{n_4}$
		$1\overset{1}{(}\ 2\ \overset{2}{)}\ \overset{3}{)}\ \overset{4}{)}5$		
{−2 $\mid$ −3 −4 1}	[1 −2 −4 −3]	$n_1 r_1 = -n_2 r_2;\ n_3 r_2 = n_4 r_4 ;\ n_5 r_4 = n_3 r_3;\ n_4 r_3 = -n_2 r_1$		—
{−3 −4 −2 $\mid$ 1}	[1 −3 −2 −4]	$n_1 r_1 = -n_3 r_3;\ n_4 r_3 = n_2 r_2 ;\ n_3 r_2 = n_4 r_4;\ n_5 r_4 = -n_2 r_1$	$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_2}{n_5}$	—
{−3 −4 1 $\mid$ −2}	[1 −3] [−2 −4]	$n_1 r_1 = -n_3 r_3;\ n_4 r_3 = -n_2 r_1 \mid n_3 r_2 = n_4 r_4;\ n_5 r_4 = n_2 r_2$		$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_3}{n_4};\ \frac{n_2 n_4}{n_3 n_5} = 1$
{−4 −2 $\mid$ −3 1}	[1 −4 −3 −2]	$n_1 r_1 = -n_4 r_4;\ n_5 r_4 = n_3 r_3 :\ n_4 r_3 = n_2 r_2;\ n_3 r_2 = -n_2 r_1$		—
		$1\overset{1}{)}\ \overset{2}{)}\ \overset{3}{)}\ \overset{4}{)}5$		
{−2 −3 −4 −1}	[−3 −1] [−4 −2]	$n_4 r_3 = n_1 r_1;\ n_2 r_1 = n_3 r_3 \mid n_5 r_4 = n_2 r_2;\ n_3 r_2 = n_4 r_4$	$\frac{n_1}{n_5} = 1$	$\frac{n_1 n_3}{n_2 n_4} = 1;\ \frac{n_2 n_4}{n_3 n_5} = 1$

[6]) Die Ungleichungen sind nicht aufgeführt.

Zweikugelabbildende Systeme.

{ }	[ ]	Beziehungen zwischen den Radien		$n_1 c_I$	$n_{\nu+1} c_I'$	β_I'	$n_1 c_{II}$	$n_{\nu+1} c_{II}'$	β_{II}'	Beziehungen zwischen den Brechzahlen[7])
		Eine Fläche								
		$1\overset{1}{(}2$								
{0 | 1}	[1 0]	—		$n_1 r_1$	$n_2 r_1$	1	$-n_2 r_1$	$-n_1 r_1$	$\frac{n_1^2}{n_2^2}$	—
		$1\overset{1}{)}2$								
{0 | −1}	[−1 0]	—		$-n_2 r_1$	$-n_1 r_1$	$\frac{n_1^2}{n_2^2}$	$n_1 r_1$	$n_2 r_1$	1	—
		Zwei Flächen								
		$1\overset{1}{(}\ \overset{2}{(}3$								
{2 | 1 0}	[1 2 0]	$n_1 r_1 = n_3 r_2$		$n_2 r_2$	$n_2 r_1$	1	$-n_2 r_1$	$-n_2 r_2$	$\frac{n_1^2}{n_3^2}$	$n_1 < n_3$
		$1\overset{1}{(}\ 2\ \overset{2}{)}3$								
{0 | 1 | −2}	[−2 1 0]	$n_3 r_2 = -n_2 r_1$		$n_1 r_1$	$-n_2 r_2$	$\frac{n_2^2}{n_3^2}$ (für beide Zeilen)	$n_2 r_2$	$-n_1 r_1$	$\frac{n_1^2}{n_2^2}$ (für beide Zeilen)	—
{−2 | 0 | 1}	[1 −2 0]	$n_1 r_1 = -n_2 r_2$		$-n_3 r_2$	$n_2 r_1$		$-n_2 r_1$	$n_3 r_2$		—
		$1\overset{1}{)}\ \overset{2}{)}3$								
{−1 | −2 0}	[−2 −1 0]	$n_3 r_2 = n_1 r_1$		$-n_2 r_1$	$-n_2 r_2$	$\frac{n_1^2}{n_3^2}$	$n_2 r_2$	$n_2 r_1$	1	$n_1 > n_3$
		Drei Flächen								
		$1\overset{1}{(}\ \overset{2}{(}\ \overset{3}{(}4$								
{0 | 2 1 3}	[2 3 1 0]	$n_2 r_2 = n_4 r_3$	$n_3 r_3 = n_2 r_1$	$n_1 r_1$	$n_3 r_2$	1 (für alle vier Zeilen)	$-n_3 r_2$	$-n_1 r_1$	$\frac{n_1^2}{n_4^2}$ (für alle vier Zeilen)	—
{2 0 1 3}	[1 2 3 0]	$n_1 r_1 = n_3 r_2$	$n_2 r_2 = n_4 r_3$	$n_3 r_3$	$n_2 r_1$		$-n_2 r_1$	$-n_3 r_3$		—
{2 1 0 | 3}	[3 1 2 0]	$n_3 r_3 = n_2 r_1$	$n_1 r_1 = n_3 r_2$	$n_2 r_2$	$n_4 r_3$		$-n_4 r_3$	$-n_2 r_2$		—
{3 | 2 1 0}	[1 3][2 0]	$n_1 r_1 = n_4 r_3$	$n_3 r_3 = n_2 r_1$	$n_2 r_2$	$n_3 r_2$		$-n_3 r_2$	$-n_2 r_2$		$\frac{n_1}{n_2}\frac{n_3}{n_4} = 1$

[7]) Die Ungleichungen sind nur für zwei Flächen angegeben.

Zweikugelabbildende Systeme (Fortsetzung).

{ }	[ ]	Beziehungen zwischen den Radien		$n_1 c_I$	$n' c_I'$	β_I'	$n_1 c_{II}$	$n' c_{II}'$	β_{II}'	Beziehungen zwischen den Brechzahlen
		1((3)4 (Ziffern 1 2 3 darüber)								
{0 | 1 —3 | 2}	[2 —3 1 0]	$n_2 r_2 = - n_3 r_3$	$n_4 r_3 = - n_2 r_1$	$n_1 r_1$	$n_3 r_2$		$- n_3 r_2$	$- n_1 r_1$		—
{0 | 2 | 1 —3}	[2 —3] [1 0]	$n_2 r_2 = - n_3 r_3$	$n_4 r_3 = - n_3 r_2$	$n_1 r_1$	$n_2 r_1$		$- n_2 r_1$	$- n_1 r_1$		$\frac{n_2}{n_3} = \frac{n_3}{n_4}$
{2 | 0 | 1 —3}	[1 2 —3 0]	$n_1 r_1 = n_3 r_2$	$n_2 r_2 = - n_3 r_3$	$- n_4 r_3$	$n_2 r_1$	$\frac{n_3^2}{n_4^2}$	$- n_2 r_1$	$n_4 r_3$	$\frac{n_1^2}{n_3^2}$	—
{2 | 1 0 | —3}	[—3 1 2 0]	$n_4 r_3 = - n_2 r_1$	$n_1 r_1 = n_3 r_2$	$n_2 r_2$	$- n_3 r_3$		$n_3 r_3$	$- n_2 r_2$		—
{—3 | 1 0 | 2}	[1 —3] [2 0]	$n_1 r_1 = - n_3 r_3$	$n_4 r_3 = - n_2 r_1$	$n_2 r_2$	$n_3 r_2$		$- n_3 r_2$	$- n_2 r_2$		$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_3}{n_4}$
{—3 | 2 | 1 0}	[1 —3 2 0]	$n_1 r_1 = - n_3 r_3$	$n_4 r_3 = - n_3 r_2$	$n_2 r_2$	$n_2 r_1$		$- n_2 r_1$	$- n_2 r_2$		—
		1(2))4 (Ziffern 1 2 3 darüber)								
{0 | —2 | —3 1}	[—3 —2 1 0]	$n_4 r_3 = n_2 r_2$	$n_3 r_2 = - n_2 r_1$	$n_1 r_1$	$- n_3 r_3$		$n_3 r_3$	$- n_1 r_1$		—
{—2 | 0 | —3 1}	[1 —2] [—3 0]	$n_1 r_1 = - n_2 r_2$	$n_3 r_2 = - n_2 r_1$	$- n_4 r_3$	$- n_3 r_3$		$n_3 r_3$	$n_4 r_3$		$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_2}{n_3}$
{—2 | 1 | —3 0}	[—3 1 —2 0]	$n_4 r_3 = - n_2 r_1$	$n_1 r_1 = - n_2 r_2$	$- n_3 r_2$	$- n_3 r_3$	$\frac{n_2^2}{n_4^2}$	$n_3 r_3$	$n_3 r_2$	$\frac{n_1^2}{n_2^2}$	—
{—3 0 | 1 | —2}	[1 —3] [—2 0]	$n_1 r_1 = - n_3 r_3$	$n_4 r_3 = - n_2 r_1$	$- n_3 r_2$	$- n_2 r_2$		$n_2 r_2$	$n_3 r_2$		$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_3}{n_4}$
{—3 0 | —2 | 1}	[1 —3 —2 0]	$n_1 r_1 = - n_3 r_3$	$n_4 r_3 = n_2 r_2$	$- n_3 r_2$	$n_2 r_1$		$- n_2 r_1$	$n_3 r_2$		—
{—3 1 | 0 | —2}	[—2 1 —3 0]	$n_3 r_2 = - n_2 r_1$	$n_1 r_1 = - n_3 r_3$	$- n_4 r_3$	$- n_2 r_2$		$n_2 r_2$	$n_4 r_3$		—
		1)))4 (Ziffern 1 2 3 darüber)								
{0 | —2 —3 —1}	[—2 —1 —3 0]	$n_3 r_2 = n_1 r_1$	$n_2 r_1 = n_3 r_3$	$- n_4 r_3$	$- n_2 r_2$		$n_2 r_2$	$n_4 r_3$		—
{—1 | —2 —3 0}	[—1 —3] [—2 0]	$n_2 r_1 = n_3 r_3$	$n_4 r_3 = n_1 r_1$	$- n_3 r_2$	$- n_2 r_2$	$\frac{n_1^2}{n_4^2}$	$n_2 r_2$	$n_3 r_2$	1	$\frac{n_1}{n_2}\frac{n_3}{n_4} = 1$
{—2 0 | —3 —1}	[—3 —2 —1 0]	$n_4 r_3 = n_2 r_2$	$n_3 r_2 = n_1 r_1$	$- n_2 r_1$	$- n_3 r_3$		$n_3 r_3$	$n_2 r_1$		—
{—2 —3 0 | —1}	[—1 —3 —2 0]	$n_2 r_1 = n_3 r_3$	$n_4 r_3 = n_2 r_2$	$- n_3 r_2$	$- n_1 r_1$		$n_1 r_1$	$n_3 r_2$		—

Anhang.

Die Untersuchungen von Bauersfeld.

§ 1. Die Bauersfeldschen Folgen.

Bauersfeld untersucht verschiedene Arten konzentrischer Folgen, die das Gemeinsame haben, daß jedes ε einem ε' entgegengesetzt gleich ist.

a) Die Folge besteht aus lauter spiegelnden Flächen. Hier ist

$$n_{\varkappa+1} = -n_{\varkappa}, \quad \text{also} \quad \varepsilon'_{\varkappa} = -\varepsilon_{\varkappa} \quad \ldots\ldots \quad (58).$$

b) Die Folge besteht aus Vollkugeln, so daß jede Fläche vom Lichtstrahl zweimal getroffen wird.

Die Gesamtzahl der Brechungen (ν) ist also gerade, ferner

$$r_{\varkappa} = -r_{\nu+1-\varkappa}, \quad n_{\varkappa} = n_{\nu+2-\varkappa} \quad \ldots\ldots \quad (59).$$

Daraus folgt

$$\varepsilon'_{\varkappa} = -\varepsilon_{\nu+1-\varkappa}.$$

c) Die Folge besteht aus einer Anzahl konzentrischer Flächen, deren letzte spiegelt, worauf die vorhergehenden zum zweiten Male durchsetzt werden. Es ist dann ν ungerade, ferner $r_{\varkappa} = r_{\nu+1-\varkappa}$, $n_{\varkappa} = -n_{\nu+2-\varkappa}$ und wieder

$$\varepsilon'_{\varkappa} = -\varepsilon_{\nu+1-\varkappa} \quad \ldots\ldots \quad (60).$$

In allen Fällen erhält man für raumabbildende Folgen (18)

$$2\sum_{1}^{\nu} \varepsilon_{\varkappa} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (61),$$

für zweiflächenabbildende Folgen (15)

$$\sigma = \sigma' + 2\sum_{1}^{\nu} \varepsilon_{\varkappa} \quad \ldots\ldots \quad (62).$$

Wir wenden auf diese Gleichungen zunächst unsere Ergebnisse an (II. Teil, § 2, Schluß). Daß die Gl. (61), also

$$\sum_{1}^{\nu} \varepsilon_{\varkappa} = 0$$

in Einzelgleichungen zerfällt, ist nur bei geradem ν möglich. Umgekehrt (da $\sigma = \sigma'$ auf den ersten Fall führt) fordert Flächenabbildung, wegen (62),

$$\sigma = \varepsilon_{\delta}, \quad \sigma' = -\varepsilon_{\delta}$$

und ein ungerades ν. Die Gl. (2) zeigen dann, daß hier eine Kugelfläche mit der Vergrößerung 1 auf sich selbst abgebildet wird. Alles zusammengefaßt:

1. Eine Folge aus einer geraden Zahl konzentrischer Spiegelflächen oder eine Folge konzentrischer Vollkugeln kann wohl raumabbildend, nicht aber zweiflächenabbildend sein. Es läßt sich ferner leicht zeigen, daß bei einer raumabbildenden Folge von Vollkugeln schon die aus den Vorderflächen bestehende Folge für sich raumabbildend ist.

2. Eine Folge aus einer ungeraden Zahl konzentrischer Spiegelflächen oder aus einer Anzahl konzentrischer Flächen, von denen die letzte spiegelt, kann nicht raumabbildend sein. Dagegen kann sie eine bestimmte Kugelfläche mit der Vergrößerung 1 auf sich selbst abbilden.

§ 2. Die Formeln von Bauersfeld.

Da dieser Fall der Abbildung ohne besondere Bedeutung ist, erweitert Bauersfeld die Aufgabe für den Sonderfall des parallel einfallenden Bündels $\sigma = 0$. Er fragt nach der Bedingung dafür, daß für den unter der Neigung σ' austretenden Strahl das parallel einfallende Bündel eine Strahlenvereinigung ϱ-ter Ordnung habe.

Hier zerfällt in den von Bauersfeld untersuchten Folgen die Gleichung

$$\sigma' + 2\sum \varepsilon_{\varkappa} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

zwar nicht in Gleichungen zu je zweien. Wohl aber müssen neben (63) noch die Identitäten

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{tg}\sigma' & + 2\sum \operatorname{tg}\varepsilon_{\varkappa} & = 0 \\ \operatorname{tg}^3\sigma' & + 2\sum \operatorname{tg}^3\varepsilon_{\varkappa} & = 0 \\ \text{— — —} & \text{— — —} & \text{— —} \\ \operatorname{tg}^{2\varrho-3}\sigma' & + 2\sum \operatorname{tg}^{2\varrho-3}\varepsilon_{\varkappa} & = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

bestehen; Gleichungen, die man leicht durch mehrfache logarithmische Differentiation der Grundgleichungen (4) erhält.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die $\varepsilon_\varkappa$ berechnen, im Fall, daß $\nu = \varrho$ ist.

Zur Berechnung verfährt Bauersfeld wie folgt. Er führt durch die Gleichungen

$$\cos \omega_\varkappa = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_\varkappa}{\operatorname{tg} \sigma'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

eine Anzahl Hilfsgrößen ein, die den Bedingungen

$$1 + 2 \sum_1^r \cos \omega_\varkappa = 0, \quad 1 + 2 \sum_1^r \cos^{2\varrho-3} \omega_\varkappa = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

genügen. Er sucht nun mittels (66) die Koeffizienten für die algebraische Gleichung des Grades $2\varrho + 1$, die Eins als einfache Wurzel und alle $\cos \omega_\varkappa$ als Doppelwurzeln hat. Die Newtonschen Gleichungen für die Potenzsummen liefern ihm dann in Verbindung mit (66) Beziehungen zwischen den Koeffizienten. Die Gleichung des Grades $2\varrho + 1$ wird schließlich in eine Gleichung für die Kosinus der Vielfachen von ω umgewandelt. So erhält man

$$\sin\left(\left(\varrho + \frac{1}{2}\right)\omega\right) + \operatorname{tg}^2 \frac{\sigma'}{2} \sin\left(\left(\varrho - \frac{3}{2}\right)\omega\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (67).$$

Gl. (65) gibt uns nun die ε, die unter Beachtung der in unserer Arbeit enthaltenen Ungleichungen den verschiedenen Flächen zugeordnet werden können. Die Gl. (4) dienen dann dazu, Radien und Brechverhältnisse zu bestimmen.

Von besonderer Wichtigkeit ist natürlich die Forderung, daß auf der Achse $(\sigma' = 0)$ eine Strahlenvereinigung ϱ-ter Ordnung oder vielmehr, infolge der Symmetrie, 2ϱ-ter stattfinde. Das führt auf

$$\omega = \frac{2\varkappa\pi}{2\varrho + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (68),$$

wobei aber die verschiedenen Werte von ω (es gibt ϱ Werte, deren Kosinus verschiedene Beträge haben) nach der eben gemachten Bemerkung zu verteilen sind.

Einige Beispiele: $\varrho = 2$. Aus (68) folgt $\omega = 72^\circ$ und $\omega = 144^\circ$. Bei geradem ϱ muß eine sammelnde Folge auf ein positives σ' führen. Trifft ferner der einfallende Strahl auf die Vorderfläche der Kugel (was bei der Vollkugel sicher der Fall ist), so wird ε_1 negativ. Daher folgt aus (63) und (65), da hier $\operatorname{tg} \varepsilon_\varkappa = \sin \varepsilon_\varkappa$ gesetzt werden kann:

$$|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|, \quad \text{also } \omega_1 = 144^\circ, \quad \omega_2 = 72^\circ.$$

a) Vollkugel:

$$r_2 = -r_1, \quad n_2 : n_1 = \sin \varepsilon_1 : \sin \varepsilon_1' = \sin \varepsilon_1 : -\sin \varepsilon_2 = \cos 144^\circ : -\cos 72^\circ = 2{,}618 .$$

Der eine von uns hat (Czapski, S. 464) erwähnt, daß eine Diamantkugel in Luft $(n_2 : n_1 = 2{,}424)$ auffallend geringe Abweichungen zeigt. Dies erklärt sich jetzt dadurch, daß bei einem nur wenig höheren Brechungsverhältnis eine Strahlenvereinigung vierter Ordnung in der Achse vorliegt.

b) Zwei Spiegel:

$$r_2 : r_1 = \sin \varepsilon_1' : \sin \varepsilon_2 = -\sin \varepsilon_1 : \sin \varepsilon_2 = -\cos 144^\circ : \cos 72^\circ = 2{,}618$$

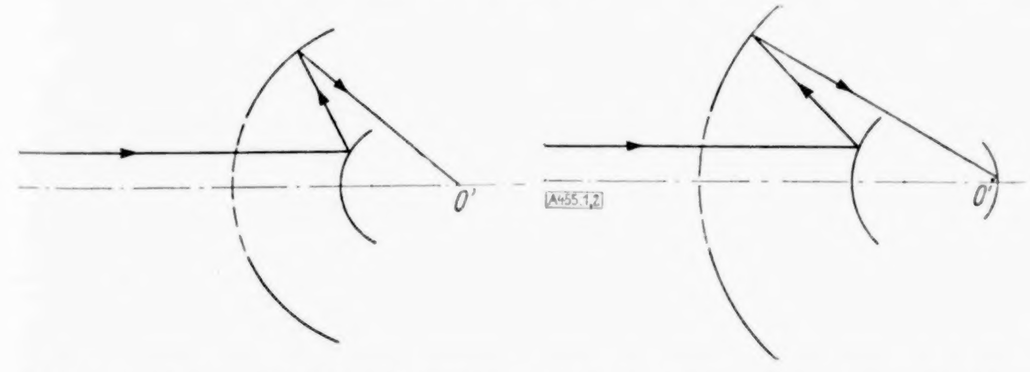


Abb. 1. Folge zweier konzentrischer Spiegel (nach Bauersfeld), so abgestimmt, daß für parallel einfallende Strahlen von kleiner Höhe eine Strahlenvereinigung vierter Ordnung stattfindet.

O' Bildpunkt.

Abb. 2. Folge dreier konzentrischer Spiegel (nach Bauersfeld), so abgestimmt, daß für parallel einfallende Strahlen von kleiner Höhe eine Strahlenvereinigung sechster Ordnung stattfindet.

O' Bildpunkt.

(Abb. 1, Zeichnung nach Bauersfeld).
(Abb. 2, gezeichnet von Bauersfeld).

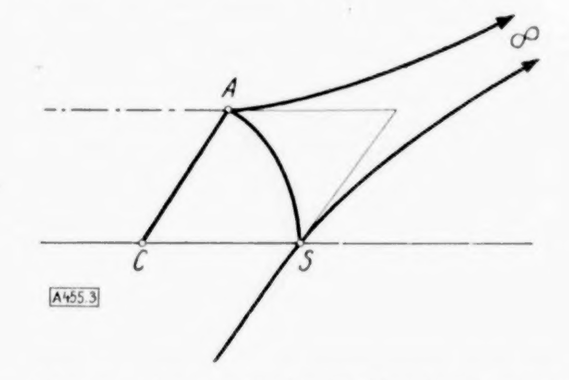


Abb. 3. Ein parallel einfallendes Bündel trifft auf die Kugel AS, wo ein zentrisch geschichtetes Mittel beginnt, dessen Brechzahl proportional dem Radiusvektor ist. Jeder gebrochene Strahl hat die Bahn einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt im Schichtenmittelpunkt liegt. Die im Unendlichen gespiegelten Strahlen vereinigen sich im Kugelscheitel S (Abbildung der unendlich fernen Ebene auf die Kugel AS).

$\varrho = 3$. Aus (68) folgen für ω die Werte $51^0, 43$; $102^0, 86$; $154^0, 29$. Bei ungeradem ϱ muß für eine sammelnde Folge σ' negativ sein. Soll wieder die Vorderfläche getroffen werden, so ist ε_1 negativ, $\cos\omega_1$ positiv, $\omega_1 = 51^0, 43$.

a) Eine Spiegelung, vorher und nachher eine Brechung: $r_1 = -r_3$, $n'_2 = -n_2$, ε_1' negativ, $\cos\omega_2$ negativ, also ε_2 positiv, r_2 positiv. Man kann setzen:

$$n_2 : n_1 = \cos 51^0, 43 : -\cos 102^0, 86 = 2{,}801\,, \quad r_2 : r_1 = -\cos 102^0, 86 : \cos 154^0, 29 = -0{,}2470,$$

oder

$$n_2 : n_1 = \cos 51^0, 43 : -\cos 154^0, 29 = 0{,}692\,, \quad r_2 : r_1 = -\cos 154^0, 29 : \cos 102^0, 86 = -4{,}049\,.$$

b) Drei Spiegelungen. Dies führt auf die Lösung

$$r_1 : r_2 : r_3 = \cos 51^0{,}43 : -\cos 102^0, 86 : \cos 154^0, 29 = 1 : 2{,}808 : -0{,}692\,.$$

§ 3. Inhomogene Mittel.

Da Bauersfeld bei den von ihm untersuchten Systemen mit Hilfe von ϱ Flächen nur Systeme erhielt, die eine Strahlenvereinigung ϱ-ter Ordnung liefern, so warf er die Frage auf, ob es möglich sei, mit unendlich viel Flächen, d. h. mit Hilfe eines inhomogenen Mittels, eine scharfe Abbildung der unendlich fernen Ebene zu erhalten.

Das führte ihn auf die Untersuchung des Verlaufs der Lichtstrahlen in einem inhomogenen konzentrischen Mittel, dessen Brechzahl proportional ist dem absoluten Betrage des Schichtradius

$$n = C\,r \quad \text{. . . . . (69).}$$

Nach Bouguer (siehe z. B. Herzberger, Ztschr. für Instr.-Kunde 1933, S. 441) sind die Bahnkurven in einem solchen Mittel eben; längs der Bahnkurven ist

$$r^2 \sin\varepsilon = \gamma \quad \text{. . . . . (70)}$$

konstant. Die Bahnkurven ergeben sich mit Hilfe dieser Konstanten γ in Polarkoordinaten als die Lösungen der Differentialgleichung (a. a. O. Formel 41)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\gamma}{r\sqrt{r^4 - \gamma^2}} \quad \text{. . . . . (71).}$$

Die Integration läßt sich ausführen und gibt (ϑ Integrationskonstante):

$$r^2 \sin 2(\varphi - \vartheta) + \gamma = 0 \quad \text{. . . . . (72).}$$

Wir erkennen aus (72):

Satz: In einem konzentrisch geschichteten Mittel, dessen Brechzahl proportional ist dem Radiusvektor, sind alle Lichtstrahlen gleichseitige Hyperbeln, deren Mittelpunkt im Schichtmittelpunkt liegt.

Aus (72) folgt übrigens für die Neigung ε der Bahnkurve gegen den Radiusvektor

$$2(\varphi - \vartheta) + \varepsilon = 0 \quad \text{. . . . . (73).}$$

ϑ ist hierin die für die betrachtete Hyperbel konstante Neigung der zum Zweig gehörigen Asymptote gegen die Achse $\varphi = 0$.

Bauersfeld verfährt nun wie folgt: Er begrenzt das inhomogene Mittel auf der einen Seite durch eine Kugel vom (beliebigen) Radius r_0, während das Mittel auf der andern Seite unbegrenzt sei. Im Dingraum setzt er die Brechzahl konstant gleich der Brechzahl des inhomogenen Mittels auf der Kugelschale. Ein parallel auf die Kugelschale fallendes Bündel von Lichtstrahlen ist dann durch

$$\varepsilon_0 = -\varphi_0 \quad \text{. . . . . (74)}$$

gegeben. Wir finden aus (73) an der Kugelfläche

$$\vartheta = \frac{\varphi_0}{2}\,,$$

d. h. die Asymptote halbiert den Winkel zwischen Achse und Radiusvektor zum Einfallspunkt. Denken wir uns (Abb. 3 von Bauersfeld) den Lichtstrahl im Unendlichen gespiegelt, so ist seine Bahn die zur Asymptote gespiegelte Hyperbel. Diese geht durch den Achsenpunkt der Kugel vom Radius r_0, d. h. die unendlich ferne Ebene wird auf diese Kugel abgebildet.

Das Ergebnis steht nur scheinbar im Widerspruch zu den allgemeinen Sätzen des ersten Teils. In diesen Sätzen war natürlich immer die Brechzahl als endlich vorausgesetzt worden, während sie im Bauersfeldschen Beispiel über alle Grenzen wächst.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur eindimensionalen Theorie der Schweißverbindungen. Die eindimensionale Theorie[1]) enthält eine Konstante k bzw. μ, welche den Proportionalitätsfaktor zwischen der Schweißnahtschubspannung und der relativen Verschiebung (v) der geschweißten Kanten darstellt. Für die praktische Verwertung der Theorie kommt es wesentlich auf die genaue Kenntnis dieser Konstanten an. Die Ergebnisse der bisherigen Forschung zeigen aber, daß diese Zahl ganz außerordentlich verschieden ist, und es konnten anscheinend noch keine Tabellen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt aufgestellt werden. Um diesem Mangel abzuhelfen, sei folgender Vorschlag gemacht:

Entsprechend der Gleichung

$$v = \mu \cdot \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hat μ die Dimension $\frac{\text{cm}}{at}$, ist also keine Materialkonstante im Sinne der Elastizitätstheorie, sondern wird mit zunehmenden Abmessungen größer werden. Wir betrachten nun ein kleines Stück der Schweißnaht (Abb. 1). Die Schubspannung τ der Schweißnaht

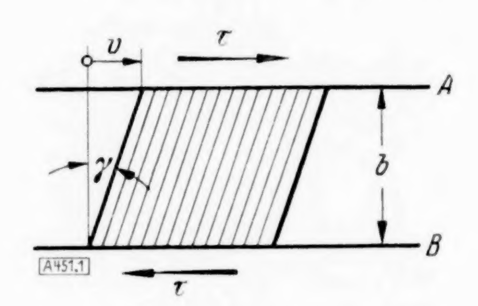


Abb. 1.

ist, wenn wir die Schweißnaht als elastisch auffassen, gleich dem Produkt aus dem Schubmodul der Schweißnaht, den wir mit G_s bezeichnen wollen, und der Winkeländerung. Führen wir mit b die Entfernung der Mitten der Schweißkanten (AB in Abb. 2) ein, so wird

$$\tau = G_s \cdot \frac{v}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Betrachten wir den Schweißnahtquerschnitt (Fläche f), z. B. bei einer sog. V-Naht (s. Abb. 2), so wird

$$AB = b = \frac{f}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wenn wir mit Hovgaard die kleinste Breite des Schweißnahtquerschnittes mit α bezeichnen. Ist die Oberfläche gewölbt und hat f z. B. die Gestalt eines Kreissektors (Abb. 3), so wird in erster Annäherung für b nicht mehr die Gerade, sondern der Bogen AB in Betracht kommen:

$$\widehat{AB} = b = \frac{\alpha}{2}\,\delta = \frac{f}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Diese Überlegungen führen zu dem allgemeinen Ansatz:

$$\tau = G_s \cdot \frac{\alpha}{f} \cdot v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

[1]) P. Fillunger: Oest. Woch. f. d. öff. Baudienst, 1919, Heft 7/8; W. Hovgaard, ZAMM, Bd. 11, 1931, S. 341.

Besteht die Schweißverbindung aus n parallelen und gleichlangen Schweißnähten (Abmessungen f_i, α_i), so ergeben sich die in den einzelnen Nähten herrschenden Schubspannungen τ_i aus dem Mittelwert τ, den die Theorie liefert, auf Grund der Beziehungen:

$$\tau_i = G_s \frac{\alpha_i}{f_i} v, \qquad \tau\,\alpha = \sum_1^n \tau_i\,\alpha_i \quad . \quad . \quad (6).$$

Wir erhalten durch Kombination mit Gl. (5)

$$\tau_i = \frac{\alpha_i}{\alpha} \cdot \frac{f}{f_i}\,\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wobei

$$\alpha = \sum_1^n \alpha_i, \qquad f = \frac{\alpha^2}{\sum_1^n \frac{\alpha_i^2}{f_i}} \quad . \quad . \quad (8)$$

zu setzen ist.

Auf diese Weise können wir sicher erwarten, daß alle bei der gleichen Schweißart unter gleichen Bedingungen gefundenen Werte G_s für verschiedene Querschnittformen und -größen nur wenig von einem Durchschnittswert abweichen werden, welcher für die betreffende Schweißart charakteristisch ist.

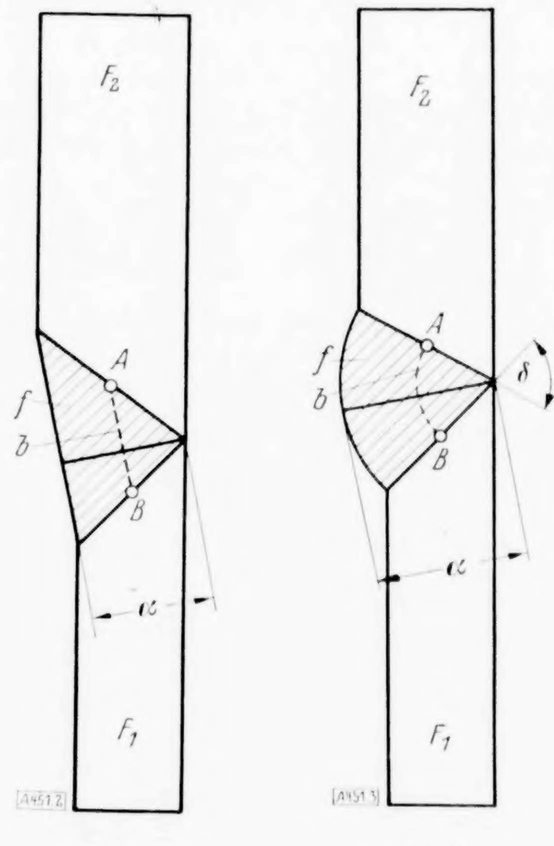


Abb. 2. Abb. 3.

Die Ergebnisse der Theorie nehmen bei Verwendung der Gl. (5) wesentlich anschaulichere Formen an. Dem Faktor k bzw. μ entspricht also hier $\frac{f}{\alpha G_s}$. Für die geschweißte Überlappung[2]) wird z. B., wenn $F_1 > F_2$:

[2]) τ_m ist hierbei der Mittelwert der Schubspannung; β ist dimensionslos und spielt die Rolle einer Abklingungszahl; L ist die Länge der Schweißnaht.

$$\tau_{\max} = \tau_m \frac{\beta\left(1+\frac{F_1}{F_2}c\,h\,\beta\right)}{\left(1+\frac{F_1}{F_2}\right)s\,h\,\beta},$$

$$\beta = \sqrt{\left(1+\frac{F_1}{F_2}\right)\frac{L^2}{F_1}\cdot\frac{a^2}{f}\cdot\frac{G_s}{E}} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Es kommt mithin auf das Verhältnis $\frac{G_s}{E}$ an, und es wäre zweckmäßig, nicht G_s selbst, sondern dieses Verhältnis für die verschiedenen Schweißarten festzulegen. Soweit es möglich war, wurden die bisherigen Forschungsergebnisse für die Ermittlung von $\frac{G_s}{E}$ vom Verfasser herangezogen. Hierbei zeigte sich $\frac{G_s}{E} = \frac{1}{4}$ als ein sehr wahrscheinlicher Wert[3]. G_s liegt demnach in der Nähe der Zahl 500000 *at*, ist also wesentlich kleiner als der Schubmodul G. Dieses Ergebnis ist durchaus einleuchtend, wenn man berücksichtigt, daß das Schweißmaterial immer von Oyxdteilchen durchsetzt ist.

(Aus dem Institut für Technische Mechanik.)

München. Heinz Neuber. 451

[3] Die Zahl $\frac{G_s}{E} = \frac{1}{4}$ findet man z. B. sehr eindeutig, wenn man mit Hilfe von Gl. (5) und der Formeln der Schweißnahttheorie die Messungen nachrechnet, über die Dr.-Ing. Hoeffgen, Karlsruhe, in „Autogene Metallbearbeitung" 1934, Heft 2, berichtet. Diese Arbeit ist übrigens eine hervorragende Bestätigung der Theorie.

Näherungsberechnung des Umfanges einer Ellipse. An den Ingenieur tritt zuweilen die Aufgabe heran, den Umfang einer Ellipse zu berechnen. Für ihn ist es wünschenswert, eine Näherungsformel zu haben, die sich einfach ausrechnen und besonders einfach merken läßt, und deren Genauigkeit für die meisten Fälle der Praxis ausreicht. Als solche empfiehlt sich die Formel:

$$u = a + b + 3\sqrt{a^2+b^2}.$$

Der so ermittelte Umfang ist gleich der Länge des in der folgenden Figur eingezeichneten Streckenzuges. An dieser sich leicht einprägenden Figur kann man sich die Näherungsformel ohne Schwierigkeit merken. Einen Überblick über die Genauigkeit der Näherungsformel bekommt man aus der folgenden Tabelle, in der neben den exakten Werten und den aus der Näherungsformel berechneten Werten mit ihrem prozentualen Fehler, auch die Werte und prozentualen Fehlerwerte der bekannten, etwas rohen Näherungsformel

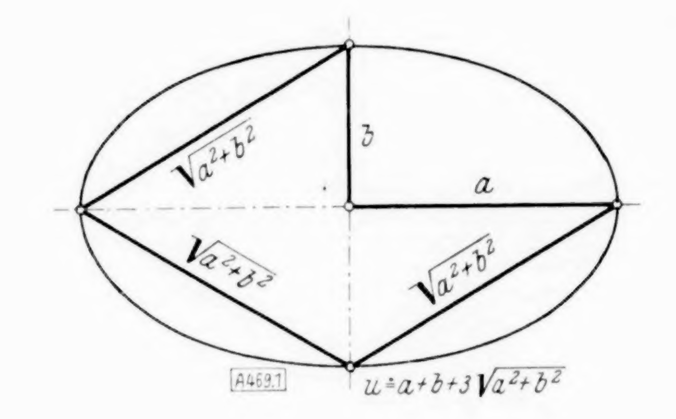
$$u = \pi(a+b)$$

eingetragen sind.

Für Werte zwischen $\frac{a}{b}$ zwischen 0.75 und 1 ist die letztere Formel etwas genauer als unsere Näherungsformel. Man kann also den Ellipsenumfang mit befriedigender Genauigkeit aus den folgenden Formeln berechnen für:

$$0 \leq \frac{a}{b} \leq 0.75 \qquad u = a + b + 3\sqrt{a^2+b^2}$$

$$0.75 \leq \frac{b}{a} \leq 1 \qquad u = (a+b)\cdot\pi.$$



Nachsatz: Eine der hier gezeigten Näherungsformel analoge Formel gilt für die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides:

$$O = 0.81\,(a\,b + b\,c + c\,a)$$
$$+ 0.83\left(a\sqrt{b^2+c^2} + b\sqrt{c^2+a^2} + c\sqrt{a^2+b^2}\right)$$
$$+ 7.6\,\Delta\left(\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{b^2+c^2},\ \sqrt{c^2+a^2}\right),$$

Δ = Dreiecksfläche aus:

Wien. Puwein. 469

$\frac{a-b}{a+b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{u}{a}$	$\frac{(a+b)\cdot\pi}{a}$	Δ %	$\frac{a+b+3\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	Δ %	Anmerkung
0.0	1.0000	$2\pi =$ 6.28$_{32}$	$2\pi =$ 6.28$_{32}$	⊖	6.24$_{26}$	− 0.65	
0.1	9/11 0.8181	5.73$_{16}$	5.71$_{16}$	− 0.35	5.69$_{43}$	− 0.65	$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, Anwendungsgrenze
0.2	2/3 0.6667	5.28$_{24}$	5.23$_{60}$	− 0.99	5.27$_{23}$	− 0.19	
0.3	7/13 0.5385	4.93$_{84}$	4.83$_{02}$	− 2.19	4.94$_{68}$	+ 0.17	$\frac{b}{a} = 0.6$, Δ = ⊖
0.4	3/7 0.4285	4.66$_{91}$	4.48$_{78}$	− 3.88	4.69$_{23}$	+ 0.50	
0.5	1/3 0.3333	4.45$_{44}$	4.18$_{88}$	− 5.95	4.49$_{56}$	+ 0.93	
0.6	1/4 0.2500	4.28$_{90}$	3.92$_{70}$	− 8.44	4.34$_{23}$	+ 1.24	
0.8	1/9 0.1111	4.07$_{61}$	3.49$_{07}$	− 14.33	4.12$_{96}$	+ 1.33	
1.0	⊖	4.00$_{00}$	$\pi =$ 3.14$_{12}$	− 21.47	4.00$_{00}$	⊖	Größter Fehler Δ = ⊖

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. KARL **GEY,** Oberstudiendirektor in Leipzig, und Dr. HORST **TEICHMANN,** Privatdozent a. d. Techn. Hochsch. Dresden, Einführung in die Lehre vom Schuß (Ballistik). (Math.-phys. Bibl. Reihe II, Bd. 11.) 113 S. + 59 Fig., 2 Tafeln. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 3,20 M.

Das vorliegende Buch, das eine sehr geschickte Zusammenstellung der wichtigsten Probleme, insbesondere der äußeren Ballistik gibt, darf heute auf einen großen Kreis von Interessenten rechnen. Die Darstellung, die an mathematischen und physikalischen Hilfsmitteln etwa das benutzt, was eine höhere Schule vermittelt, ist flüssig und gut lesbar, aber leider an manchen Stellen etwas oberflächlich und flüchtig. Das zeigt sich z. B. darin, daß Wiederholungen vorkommen, daß im ersten Kapitel Tatsachen, die man unmittelbar sieht, durch Rechnung abgeleitet werden, vor allem aber in Versehen und Fehlern. So findet man z. B., um einiges anzuführen, auf S. 37 die Gleichung $\sin \alpha = 90^{\circ}$; auf S. 41/42 werden Aussagen über den Luftwiderstand gemacht, die für den Quotienten aus Luftwiderstand und Quadrat der Geschwindigkeit gelten, auf der folgenden Seite wird, da die Verfasser nicht beachten, daß der Quotient aus einem Wege und der mittleren Geschwindigkeit eine Zeit ist, eine Verzögerung gleich der Differenz zweier Geschwindigkeiten gesetzt, usw. Die Betrachtungen über Treffwahrscheinlichkeit werden dadurch unklar, daß nicht beachtet wird, daß eine stetige Verteilungsfunktion, wie die Gaußsche, die Wahrscheinlichkeitsdichte und nicht die Wahrscheinlichkeit gibt. Derartige Versehen sind um so bedauerlicher, als man das Buch im übrigen nur empfehlen kann. Werden daher bei einer Neuauflage durch eine gründliche Durcharbeitung derartige Flüchtigkeiten und Fehler beseitigt, dürfte sich ein Buch ergeben, das für die dringend erforderliche Verbreitung der Kenntnis der Ballistik ein sehr brauchbares Hilfsmittel sein wird.

Freiberg i. Sa. Fr. Willers. 500

Dr. phil. A. **TIMPE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik. IV + 217 S. m. 70 Textabb. Berlin 1934, Julius Springer Verlag. Preis kart. 9 M.

Es ist sehr zu begrüßen, daß hier von einem etwas weiteren mathematischen Standpunkt, als dies sonst üblich ist, die Aufgaben der sogenannten Finanzmathematik behandelt werden. In klarer und flüssiger Darstellung, die sich an Leser mit guter höherer Schulbildung wendet, entwickelt der Verfasser zunächst die Grundsätze der Rentenrechnung im allgemeinsten Sinne dieses Wortes. Dabei wird nicht unterlassen, manche sehr einfach scheinende praktische Fragen, wie die Aufstellung von Rechnungsauszügen zu besprechen. Jede einzelne Aufgabe wird in sorgfältiger Weise durch vollständig durchgerechnete Beispiele erläutert. Vielleicht hätte auf einzelne schwierigere Probleme, wie die der Berechnung des effektiven Zinsfußes, noch etwas genauer eingegangen werden können. In einem weiteren Abschnitt, der als „Erfolgsrechnung" bezeichnet ist, behandelt der Verfasser Fragen, die sich mit dem Gebiet der mathematischen Volkswirtschaftslehre berühren, hält sich aber dabei von den auf diesem Gebiet häufig auftretenden Übertreibungen fern. Der letzte Teil des Buches, der der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Aufgaben der Wirtschaftsmathematik gewidmet ist, mutet stark schematisch an. So sollte man z. B. die Korrelations-Koeffizienten nicht ohne genaue Vorbehalte einführen. Hier, wie auch bei der Behandlung der Analyse von Zeitreihen, wird man eine Modernisierung der Auffassung wünschen. Hoffentlich hat der Verfasser bald Gelegenheit, in einer neuen Auflage diesem Wunsche Rechnung zu tragen. Mises. 503

HEINRICH **LIEBMANN,** o. Prof. a. d. Un. Heidelberg, Synthetische Geometrie. (Teubners mathem. Leitfäden Bd. 40.) 109 S. m. 45 Fig. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 5,60 M.

„Die neuere synthetische Geometrie will bekanntlich, im Gegensatz zur älteren, die Reinheit der Methode wahren: Keine Kongruenzsätze, keine Messungen, nur Lage und Sicht." — „Das Stoffliche der Geometrie, die Fülle der Aussagen und Konstruktionen, ist zum großen Teil der streng wissenschaftlichen Behandlung vorangegangen, und jeder einzelne erlebt diese Entwicklung an sich selber. Erst später, nachdem man einen stattlichen Teil des Gebäudes überblickt, kann die Besinnung auf die Grundlagen einsetzen und an scharfe Herausarbeitung herangegangen werden. Trotzdem wird man heute von einer Darstellung verlangen, daß sie sich zuerst mit den Grundlagen auseinandersetzt." Diese Sätze aus Vorwort und Einleitung kennzeichnen Ziel und Methode des Buches: Ausgehend von Hilberts Verknüpfungsaxiomen führt es jeweils an geeigneter Stelle die im Gang der Entwicklung notwendig werdenden weiteren Axiome ein. Um der Reinheit der Methode willen wird die geometrische Stetigkeit nur im Bereich sog. „schwacher" Stetigkeitsaxiome verwendet; dafür treten die „Vertauschungsaxiome der Pascalschen Anordnung" und später weitere Axiome ein, die allerdings der unmittelbaren Erfassung durch die natürliche Anschauung ferner liegen und in der älteren synthetischen Geometrie als eines Beweises bedürftige Sätze gelten. Läßt man Axiome dieser Art zu, so findet man Belehrung und Genuß nicht nur an dem logischen Aufbau, sondern auch an den Einzelheiten des aus der ebenen und räumlichen Geometrie dargebotenen Stoffes, an seiner konstruktiven Gestaltung und an seinen Verknüpfungen mit der analytischen Geometrie und mit den Maßgeometrien.

Dresden. W. Ludwig. 507

PETER **DEBYE,** Röntgen und seine Entdeckung. Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte. 6. Jahrg., Heft 4. 83—103 S. Berlin 1934, VDI-Verlag. Preis 0,90 M.

Das Heft, in dem P. Debye das Leben und Wirken Röntgens in fesselnder Weise darstellt, ist nicht nur für den Physiker von Interesse. Er richtet sich, wie es der Zweck der Schriften des Deutschen Museums ist, an breitere Kreise und wird zweifellos allen Freude machen, die es in die Hand nehmen.

VDI-Jahrbuch 1935. Die Chronik der Technik. 183 S. Berlin 1935, VDI-Verlag. Preis brosch. 3,50 M, VDI-Mitglieder 3,15 M.

Der Verein Deutscher Ingenieure gibt im VDI-Jahrbuch 1935 wieder einen Überblick über die wissenschaftlichen und praktischen Fortschritte auf allen Gebieten des Ingenieurwesens. Mit über 5000 Literaturhinweisen stellt das Buch einen vortrefflichen Führer durch das technische Schrifttum dar, der dieselbe Anerkennung finden wird wie sein Vorgänger im letzten Jahre. Ein einführender Artikel „Der Weg zum Schrifttum" von Bibliotheksrat Walther-Aachen weist in sehr dankenswerter Weise auf die mannigfachen Möglichkeiten der Schrifttumsbeschaffung hin. Trefftz. 510

MARIO **MEDICI**, Prof. a. d. Technischen Hochschule Padua. Le Machine Idrauliche. Biblioteca Dell'Ingegnere Bd. 3 (Herausgeber Prof. G. Albenga). 520 S. m. 325 Fig. Torino 1934 — XII. Unione Tipografico-Editrice Torinese.

Der auch in der deutschen Fachliteratur bekannte Verfasser hat hier ein ziemlich umfassendes Werk über Wasserturbinen und Pumpen veröffentlicht, dessen Inhalt angegeben werden soll: Der erste Abschnitt enthält so ziemlich alles, was zur theoretischen Vorbereitung des Ingenieurs für das genannte Gebiet erforderlich ist. Im 2. Abschnitt, der sich speziell mit Turbinen befaßt, werden diese in ihrem Aufbau und ihrer Arbeitsweise beschrieben und nach Anwendungsgebieten geschieden. Der Darstellung der Theorie der Peltonräder folgt jene der Überdruckturbinen und ihrer Teile, besonders ausführlich werden die einzelnen Verluste behandelt. Bei der Besprechung der sogenannten charakteristischen Linien vermißt man vielleicht deren theoretische Herleitung, auch die konstruktive Durchführung und die Herstellung in der Werkstätte sind etwas vernachlässigt. Dafür sind die theoretischen Betrachtungen auf Grund mehrfacher eigener wissenschaftlicher Arbeiten und mit Heranziehung besonders der deutschen Literatur sehr sorgfältig durchgearbeitet. Die Regelung ist nur in einigen Einzelheiten behandelt. Im 3. Abschnitt werden die Kreiselpumpen in ähnlicher Weise besprochen wie die Turbinen, auch hier sind vielfach eigene Arbeiten zugrunde gelegt. Es folgt ein kurzer Abschnitt über Kolbenpumpen, der freilich nur als Überblick zu werten ist, und ein solcher über hydraulische Arbeitsübertragung. Zusammenfassend muß das Buch als ein sehr schätzenswerter Beitrag zur Literatur über hydraulische Maschinen angesehen werden. Wenn ein Wunsch unerfüllt bleibt, ist es der, daß der Konstrukteur hier zwar so ziemlich alles finden kann, was für das Verständnis der Vorgänge erforderlich ist, aber doch nicht vollständig jene unmittelbare Anleitung erhält, die ihm für die Berufsarbeit nützlich wäre.

Prag. K. Körner. 506

K. **OLTAY**, Relative Schwerkraftmessungen zwischen Budapest und Padova. Mitteilungen des Ungarischen Geodätischen Instituts IV. Budapest 1934.

Bei diesen Messungen handelt es sich um eine Verbindung des italienischen Schwerkrafthauptpunktes in Padua mit dem ungarischen Hauptpunkt in Budapest. Zur Verwendung kam ein Pendelapparat von Stückroth mit vier vernickelten Messingpendeln. Wie die Ergebnisse der vor und nach den Messungen in Padua in Budapest ausgeführten Messungen zeigen, darf angenommen werden, daß bei den Pendeln keine Veränderungen während ihrer Benutzung aufgetreten sind. In beiden Punkten wurde als Koinzidenz-Uhr eine Sekundenpendeluhr von Hoser verwendet. Die Bestimmung des Uhrganges mit Hilfe der Zeitzeichen der Funkstationen erfolgte durch deren objektive Übertragung auf den Chronographen. Das Empfangsgerät wurde von E. Winkler für den vorliegenden Zweck besonders entworfen und gebaut.

Die Mitteilung enthält Untersuchungen der Genauigkeit der ausgeführten Messungen. Das Endergebnis ist mit einem mittleren Fehler von $\pm 0{,}0008\ \mathrm{cm/sek^2}$ behaftet; es muß deshalb als recht gut bezeichnet werden. Ein Vergleich des für Padua gefundenen Wertes der Schwerkraft mit dem in dem Schwerkraftnetz von E. Borraß berechneten Wert zeigt, daß für dieses Netz eine Neuausgleichung notwendig geworden ist.

Dresden. P. Werkmeister. 499

F. A. VENING **MEINESZ**, Ergebnisse der Schwerkraftbeobachtungen auf dem Meere in den Jahren 1923—1932. (Sond.-Druck a. Ergebn. d. kosm. Physik, Bd. 2.) 60 S. m. 7 Fig. u. 4 Kart. Leipzig 1934. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Es handelt sich um die Ergebnisse von Schweremessungen, von denen die meisten an Bord von Unterseebooten vom Verfasser und von anderen nach dem Mehrpendelverfahren ausgeführt wurden. Der Mitteilung der Messungsergebnisse und deren Besprechung ist eine Einleitung vorausgeschickt, in der die Aufgaben der Schweremessungen, bestehend in der Bestimmung der Form der Erde und der Ermittlung der Massenverteilung der Erde, in klarer Weise behandelt werden.

Die vorliegenden Ergebnisse bestätigen das Ergebnis der von O. Hecker in den Jahren 1901 bis 1909 erstmals auf dem Meer ausgeführten Schweremessungen, wonach im großen und ganzen auf den Meeren mit leidlicher Annäherung Isostasie vorherrscht. Der Verfasser vertritt daher die Ansicht, daß man heute keinen Grund mehr hat, die Tendenz zum isostatischen Gleichgewicht der Erdrinde zu leugnen oder anzuzweifeln. Bei der Besprechung der Ergebnisse wird darauf hingewiesen, daß auch die heute vorliegenden Schweremessungen auf dem Meere bei weitem noch nicht ausreichen, um zusammen mit denjenigen auf den Kontinenten eine Bestimmung der Erdgestalt auf Grund des Satzes von G. Stokes zu ermöglichen.

Dresden. P. Werkmeister. 499

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. M. **LIWSCHITZ**, Oberingenieur der Siemens-Schuckert-Werke, Berlin, Die elektrischen Maschinen. Bd. III: Berechnung und Bemessung, unt. Mitarb. von Dr.-Ing. H. RAYMUND. 380 S. + 307 Abb. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 22,50 M.

Dr. GEORG **JOOS**, o. ö. Prof. a. d. Univ. Jena, Lehrbuch der theoretischen Physik. 665 S. + 164 Fig. Leipzig 1934. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis brosch. 22 M, geb. 24 M.

Berichte aus dem Laboratorium für Verbrennungskraftmaschinen der Techn. Hochschule Stuttgart. Heft 3. 109 S. + 125 Abb. Stuttgart 1934, Verlag Konrad Wittwer. Preis geh. 9,50 M.

KARL **MENNINGER**, Rechenkniffe. Lustiges und vorteilhaftes Rechnen. VIII + 86 S. Frankfurt a. M. 1934, Verlagsbuchh. Karl Poths. Preis Ganzl. 2,50 M.

J. H. M. **WEDDERBURN**, Lectures on Matrices (American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. XVII). VII + 200 S. New York 1934, publ. by American Mathematical Society. Preis geb. 3 $.

Prof. Dr. R. **FUCHS**, Prof. Dr. L. **HOPF**, Dr. FR. **SEEWALD**, Aerodynamik. Bd. I, Mechanik des Flugzeugs von L. Hopf. VI + 339 S. m. 268 Abb. Berlin 1934, Verl. Jul. Springer. Preis geb. 30 M.

Dr. phil. ARTHUR **HAAS**, Prof. f. Physik a. d. Universität Wien. Kleiner Grundriß der Theoretischen Physik. Kl., besonders bearbeitete Ausg. der Einführung in die theoretische Physik. VII + 183 S. m. 22 Fig. Berlin und Leipzig 1934, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 5,30 M.

Dr. ERICH **WAETZMANN,** o. Prof. f. Physik in Breslau. Schule des Horchens. VI + 65 S. m. 14 Abb. Leipzig und Berlin 1934, Verl. B. G. Teubner. Preis kart. 1,40 M.

Aerodynamic Theory, A General Review of Progress. Under a Grant of the Guggenheim Fund for the Promotion of Aeronautics hrsg. v. William Frederic Durand. Vol. II, General Aerodynamic Theory — Perfect Fluids Th. v. Kármán und I. M. Burgers. XV + 367 S. m. 113 Fig., 4 Tafeln. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis geb. 20 M.

Dr.-Ing. WILH. **FLÜGGE,** Privatdozent a. d. Universität Göttingen. Statik und Dynamik der Schalen. VII + 240 S. m. 98 Textabb. Berlin 1934, Verlag Julius Springer. Preis geb. 22.50 M.

B. L. **VAN DER WAERDEN,** Gruppen von linearen Transformationen. („Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", hrsg. v. d. Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik", 4. Bd. 2.) 91 S. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 8,80 M.

NACHRICHTEN

Zu Geheimrat Professor Lorenz' 70. Geburtstag[1]).

Der junge Ingenieur, der 1891 bei A. Riedinger in Augsburg eine Druckluft-Kraftanlage nach dem Poppschen System entwarf, die eine neue Energieverteilung an viele Verbraucherstellen vorsah, wußte wohl, daß dies nur eine Zwischenlösung des Problems sein konnte. Denn schon kündete sich die elektrische Fernübertragung, mächtig angeregt durch die erste Anlage Laufen—Frankfurt, als die „Universalkraft" der Zukunft an. Aber trotzdem faßte der junge Hans Lorenz seine Aufgabe mit Freude an, bot sie ihm doch reichlich Gelegenheit, die theoretischen Lehren der Thermodynamik erfolgreich in die Praxis umzusetzen, die er von seinem verehrten Lehrer Zeuner an der Dresdner technischen Hochschule übernommen hatte. Weitere Pläne konnte Lorenz als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Riedinger für die neuaufkommende Luftschiffahrt schmieden helfen, und sie brachten ihn zugleich mit Männern wie Parseval, Bartsch von Sigsfeld u. a. in engere Zusammenarbeit, bei der Lorenz als „Nebenprodukt" für sich eine erhebliche Bereicherung der „Theorien in der Technik" einheimsen konnte.

Nach einem Jahr Spezialarbeit im Kältemaschinenbau bei Escher-Wyß in Zürich ging Lorenz 1894 als freischaffender Zivilingenieur nach München, wo bald auch einige jener erwähnten Nebenprodukte zu fertigen Werken reiften[2]), und wo er auch mit einer technischen Arbeit aus der Thermodynamik — ein damals seltener Fall — an der Universität promovierte.

Aber schon war der junge Ingenieur bekanntgeworden als berufener Interpret wissenschaftlicher Technik, und so erhielt er 1896 seinen ersten Hochschulruf nach Halle, wo er landwirtschaftliche Maschinen, daneben aber auch allerlei technische Fächer (z. B. Schwingungslehre) vorzutragen hatte. Nicht lange danach kam er 1900 nach Göttingen, an das von Felix Klein neu geschaffene Institut für technische Physik, und hier konnte er seine Gedanken einer engen Verbindung von Theorie und Praxis im Maschinenbau weiterführen und durch vielseitige Versuche unterstützen. Für manche seiner späteren Arbeiten ist diese Zeit grundlegend gewesen[3]). Es mag dabei nicht verschwiegen werden, daß Lorenz' Tätigkeit in Göttingen nicht unbestritten blieb. Trotz des Weitblicks von F. Klein galt der Ingenieur an der Universität noch als ein Fremdling; Lorenz mußte sich erst langsam durchsetzen, und er hat es getan und damit auch seinem Nachfolger Prandtl in mancher Hinsicht den Weg vorbereitet, den dieser in der weltbekannten und auch hier kürzlich gebührend gewürdigten Weise gegangen ist.

Lorenz wurde dann 1904 an die neugegründete technische Hochschule nach Danzig berufen und hat dort volle 30 Jahre als Hochschullehrer für Mechanik und als Leiter des Festigkeits-Instituts und Materialprüfungsamtes gewirkt.

Lorenz' Art als Lehrer war nicht immer leicht für Anfänger. Er blieb zwar auch da immer Ingenieur, der auf dem Boden technischer Wirklichkeit stand und der stets vom gegebenen Problem ausging, um danach das Allgemeine zu lehren und schließlich wieder den Weg zur Systematik der mechanischen Probleme zurückzufinden. Aber er mutete seinen Hörern viele und oft schwierige mathematische Entwicklungen zu. Dadurch freilich zwang er sie zu intensiver Mitarbeit, und dieses geistige Training half seinen Schülern später die Scheu vor dem Studium umfangreicher mathematischer Abhandlungen zu überwinden, ein Vorteil, der leider nicht allzuvielen Ingenieuren eigen ist.

In den höheren Semestern waren dagegen die Vorlesungen von Lorenz sehr beliebt, und wer etwa eines seiner „Höhenkollegs" über ein Sondergebiet der Mechanik hören konnte, der wird sich mit Freude und Dankbarkeit daran erinnern, wie Lorenz seine Zuhörer immer wieder teilnehmen ließ an dem Werdegang seiner eigenen neuen Gedanken, mag es nun in der Theorie der Kreiselräder oder in der Ballistik gewesen sein oder mag es sich um Fragen der Thermodynamik oder elastizitätstheoretische Probleme gehandelt haben. Die Lorenz eigene Weise, technische Probleme in mathematische Form von möglichst einfacher Art zu kleiden und daraus durch sehr geschickte Handhabung elementar-mathematischer Schlußweisen vielseitige Folgerungen von praktischer Wichtigkeit zu entwickeln, wird jedem seiner Hörer in lebendiger Erinnerung bleiben.

Lorenz hat darum auch eine große Zahl von Schülern gehabt, die später als praktische Ingenieure oder als Hochschullehrer das, was sie von ihm mitbekommen haben, als wertvolles Erbe weiter verwerten konnten.

Viele von Lorenz' bekanntesten Arbeiten entstanden so aus dem Kolleg heraus: seine Lehrbücher der Hydromechanik, der technischen Elastizitätslehre und der allgemeinen Mechanik, Werke, die trotz mancher Kritik, die sie sich im einzelnen gefallen lassen mußten, wegen ihrer klaren Verbindung der Theorie mit sehr vielseitiger praktischer Anwendung zu den besten deutschen Erscheinungen dieser Art gehören.

Lorenz als Forscher hat sein eigenes Gesicht: zunächst das der Universalität. Seine Forschertätigkeit lag auf sehr verschiedenen Gebieten. Es wurde ihm eben alles zum Forschungsobjekt, sei es, daß ihn seine Ingenieurtätigkeit oder eine zeitbewegende Erfindung dazu anregte, sei es auch, daß ihn ein Kapitel aus seinem Kolleg besonders anzog.

[1]) Hans Lorenz geboren am 24. März 1865 zu Wilsdruff in Sachsen.

[2]) Im Oldenbourgschen Verlage erschienen damals die „Neueren Kühlmaschinen", ein richtunggebendes Werk, das bisher 6 Auflagen erlebt hat. Lorenz war auch Gründer und Herausgeber der Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie.

[3]) Hier entstand auch die Monographie „Dynamik der Kurbelgetriebe" aus Anlaß der Erfindung des Schlickschen Massenausgleichs, und der Anfang seines umfassenden Mechanikwerkes mit der „Techn. Mechanik starrer Systeme".

Ob er als Fachmann für Kältetechnik, als wissenschaftlich arbeitender Dampfmaschinen-Ingenieur, als Lehrer für Mechanik, als Begründer neuer Theorien für Kreiselräder, endlich auch als Ballistiker und Raketenforscher sich betätigte — immer ist es eine persönliche Note, die allen seinen Arbeiten eignet. Nur noch erwähnt seien hier die überaus zahlreichen kürzeren und längeren Gelegenheitsaufsätze auch aus anderen Gebieten in der technischen Literatur [4]).

Und über alle diese Dinge des technischen Lebens zog es Lorenz immer wieder hin zu den idealen Höhen der reinen Mechanik, die ihre konsequente und lückenlose Anwendung in der Himmelsmechanik findet. Hier weiter zu forschen und zahlenmäßig zu erfassen, was wir als letzte Erkenntnis der Dinge noch festzustellen vermögen, war immer sein tiefster Wunsch. In seiner Abschiedsvorlesung [5]) in Danzig (1934) weist er über die Grenzen unserer Welt hinaus in den Makrokosmos des Alls und leuchtet hinein in den Mikrokosmos des Atoms, alles verbindend durch einfache Grundgesetze der Mechanik, deren sinnvolle Beherrschung ihm eine überraschende zahlenmäßige Durchdringung dieser letzten Dinge erlaubt.

An seinem 70. Geburtstag mag noch ein Wort über Lorenz als Mensch gesagt werden. In seinem Hause sind jahraus jahrein viele Freunde, Berufsgenossen und Hochschulkollegen ein- und ausgegangen, und wohl keiner ist ohne bleibenden Eindruck von seiner Persönlichkeit geschieden. Überaus belesen und interessiert in den Fragen der Kunst, Literatur und besonders auch der Politik hat er sich stets ein klares eigenes Urteil bewahrt, auch dann, wenn es der offiziellen Tagesmeinung zuwiderlief; unbekümmert und temperamentvoll pflegte er seine Ansicht jedem gegenüber zu vertreten.

Ein besonderer Zug ist seine Liebe zur Natur. Dies und seine Kenntnis von fremden Ländern und Leuten, die er sich auf manchen Reisen angeeignet hat, brachte ihn auch solchen Menschen nahe, die seine fachlichen Interessen nicht zu teilen vermochten.

Und über diesem allen ist Lorenz vielen, die ihm persönlich näherkommen durften, ein treuer Freund geworden, dessen Güte und Herzlichkeit auch im Laufe der Jahre unverändert blieb.

So rundet sich das Lebensbild des nunmehr 70jährigen Mannes als das einer kraftvollen und klaren Persönlichkeit von unbestrittenem Verdienst um die deutsche Ingenieurforschung und zugleich als eines aufrechten Menschen von weltweitem Idealismus.

Wir, seine Freunde, und alle, die mitarbeiten an der Erforschung der Natur im weitesten Sinne, wünschen, daß ihm noch mancher neue Einblick in das Walten der Weltgesetze vergönnt sein möge, und daß Freude und Befriedigung darüber noch viele Jahres seines Lebens verschönen möchten!

Hannover, Techn. Hochschule. A. Pröll. 505

Hugo Junkers †.

Am 3. Februar starb in Gauting bei München, im Alter von 76 Jahren, Hugo Junkers. Mit ihm ist eine der markantesten Erscheinungen unter den deutschen Ingenieuren dahingegangen. Der Anteil, den er am Aufbau des deutschen Flugwesens gehabt hat, hat seinen Namen nicht nur in Deutschland bekannt gemacht: in der ganzen Welt hat der Klang seines Namens und der Ruf seiner Werke dazu beigetragen, die Achtung vor den wissenschaftlichen und praktischen Leistungen der deutschen Technik zu mehren. — Die Werke, die Junkers gegründet und in schweren Zeiten geführt hat, zeugen von einem Leben unermüdlicher und uneigennütziger Arbeit; in ihnen ist der Geist dieses einzigartigen Ingenieurs verkörpert.

Junkers war in Wahrheit die Seele seiner Werke, auf ihn gingen letzten Endes alle Anregungen zu den großen technischen Leistungen zurück. Seine beispiellos kühnen Pläne entsprangen einer unerschöpflichen, technischen Phantasie, der Sinn für das Mögliche gab seiner Arbeit die Richtung, eine ungemeine Zähigkeit sicherte ihm den Erfolg. In Junkers vereinigte sich eine ungewöhnliche Kraft des Denkens mit einem unbeugsamen Willen zur Tat. Die Probleme, die ihn beschäftigten, durchdachte er von Grund aus, zugleich kritisch und schöpferisch. Er war durchdrungen von dem hohen Wert wissenschaftlicher Erkenntnis und wußte als Ingenieur den Wert der Erfahrung sehr wohl zu schätzen, aber er ließ sich von ihnen nicht beherrschen, sondern stellte sie in den Dienst seiner Ideen und seines Werkes.

Ebenso war ihm der materielle Ertrag, der sich in Geld und Geldeswert ausdrückt, nur insoweit von Bedeutung, als er ihn in den Stand setzte, seinen Ideen zu leben und mit seinem Werke seinem Volke zu dienen. — Der Dienst an seinem Volke und damit an der Menschheit überhaupt war für Junkers eine Selbstverständlichkeit. Er sah darin weniger eine Pflicht im formalen Sinne als die Form des Daseins, die dem Leben erst Sinn und Wert verleiht. In dieser Auffassung lag eine ungeheure suggestive Kraft, durch die er seine Mitarbeiter zu einer das Alltagsmaß übersteigenden Höhe der Leistungen zu führen vermochte. Dieser Geist verband ihn und seine Mitarbeiter zu einer wahren Gemeinschaft.

Wer immer Junkers kennen lernte, gewann von seiner Persönlichkeit als beherrschenden Eindruck den einer ungeheuren Vitalität, die sich in allen Äußerungen seines Wesens kundtat. Sei es in der Arbeit, sei es in sportlicher Betätigung, oder auch, wenn er — ein echter Sohn seiner rheinischen Heimat — im frohen Kreise fröhlich war. — Für die Welt hat Junkers sich in seinen Werken ein Denkmal gesetzt; in der Erinnerung seiner Mitarbeiter und Freunde wird er fortleben als eine der fesselndsten Persönlichkeiten unserer Zeit.

Trefftz. 512

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 25. Januar sprach Hr. Prof. Dr. A. Klose-Berlin über „Kosmische Dynamik".

Am 8. Februar hielt Hr. Dr. L. Collatz-Berlin einen Vortrag über „Eine Verallgemeinerung des Differenzenverfahrens für Differentialgleichungen. Anwendung auf die Theorie biegsamer Platten".

Am 22. Februar sprach Hr. Priv.-Dozt. Dr. G. Weinblum-Berlin über „Rotationskörper geringsten wellenbildenden Widerstandes".

Persönliches.

Am 14. März verstarb in Dresden der Geh. Hofrat Prof. Dr phil. Dr.-Ing. e. h. Richard Mollier, o. Prof. i. R. für Wärmelehre an der Technischen Hochschule Dresden.

[4]) In diesem Zusammenhang sei auf verschiedene historische bzw. programmatische Vorträge allgemeinen Charakters hingewiesen: Über die Prinzipien der Mechanik (1907), Die Theorien in der Technik (1922), Entwicklung der Mechanik im Schiffbau (1906) und andere.

Die Techn. Hochschule Braunschweig ehrte das Wirken Lorenz' durch die Ehrenpromotion (1919). Außerdem war Lorenz Ehrenmitglied verschiedener gelehrter und Ingenieurvereine.

[5]) Kosmische und Atomkonstanten (Astron. Nachr. 1934).

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.